



TITLE:

弾塑性骨組の臨界挙動予測解析の
ための増分摂動法(Dissertation_全
文)

AUTHOR(S):

森迫, 清貴

CITATION:

森迫, 清貴. 弾塑性骨組の臨界挙動予測解析のための増分摂動法. 京都大学, 1991, 博士(工学)

ISSUE DATE:

1991-07-23

URL:

<https://doi.org/10.11501/3057627>

RIGHT:

②

弾塑性骨組の臨界挙動予測解析
のための増分摂動法

1991年 3月

森 迫 清 貴

目 次

序 章

はじめに	1
0.1 構造物の臨界挙動の予測解析に関する歴史的展望	3
0.1.1 分岐点および分岐後釣合経路	3
0.1.2 釣合経路の追跡問題への摂動法の適用	4
0.2 整合剛性選択問題	5
0.2.1 循環剛性選択過程に陥った場合の従来の対処法	5
0.2.2 剛体－ばね柱モデルによる整合剛性選択過程の検討	6
0.3 移動座標と伝達行列法を用いた弾塑性骨組の大たわみ解析法	8
0.4 弾塑性骨組の臨界挙動予測解析のための増分摂動法	9
0.4.1 本研究で提案される解析法の満たすべき条件	9
0.4.2 増分摂動法の導入における新たな工夫点	10
0.5 本論文の構成および既発表論文との関係	12

第1章 剛体－ばね柱モデルによる整合剛性選択過程

1.1 序	15
1.2 解析モデル	16
1.3 制御変数によるばねの縮みの速度表示	18
1.3.1 鉛直荷重 p を制御変数とする場合（解法 p ）	19
1.3.2 鉛直変位 u を制御変数とする場合（解法 u ）	25
1.3.3 回転角 θ を制御変数とする場合（解法 θ ）	27
1.4 ばねの縮み速度の符号による整合剛性領域図の作成	29
1.4.1 塑性剛性係数が正の場合	32
1.4.2 塑性剛性係数が負の場合	40
1.5 ばねの縮み速度と剛性係数が矛盾する領域からの剛性選択過程	47
1.5.1 塑性剛性係数が正の場合	47
1.5.2 塑性剛性係数が負の場合	51
1.5.3 循環剛性選択過程	51
1.6 釣合経路の追跡と整合剛性探索方法の検討	53

1.6.1 剛性行列の固有値と固有ベクトル	53
1.6.2 速度ベクトル $\{\dot{p} \ \dot{\theta}\}^T$	55
1.6.3 塑性分岐点近傍を通る釣合経路の追跡	56
1.6.4 換算係数荷重を越えてばねが降伏する釣合経路の追跡	64
1.7 剛性行列が正定値でなくなったときの整合剛性選択手順	68
1.7.1 剛性行列の固有値および固有ベクトルを用いた 剛性選択過程の考察	68
1.7.2 整合剛性選択手順	78
1.8 まとめ	81
第2章 弾塑性骨組の静的臨界挙動予測解析のための増分摂動法	
2.1 序	83
2.2 要素摂動方程式の誘導	84
2.2.1 有限要素と座標系の設定	84
2.2.2 有限要素基礎式の数値表示	85
2.2.3 状態変数の摂動展開	87
2.2.4 摂動係数関係式と要素摂動方程式	90
2.3 伝達行列法による部材摂動方程式の誘導	93
2.4 増分長の決定	96
2.5 整合剛性選択アルゴリズム	98
2.6 弾塑性骨組の静的臨界挙動予測解析プログラム F E R T - P	104
2.7 まとめ	104
第3章 単純な臨界挙動についての予測解析と整合剛性選択過程	
3.1 序	107
3.2 弾性分岐挙動の予測解析	108
3.2.1 単純梁柱の対称分岐挙動	108
3.2.2 三角ラーメンの非対称分岐挙動	110
3.3 弾塑性臨界挙動の予測解析と整合剛性選択過程	110
3.3.1 繰り返し軸方向荷重を受ける鋼部材の挙動	110
3.3.2 弾塑性三角ラーメンの分岐後挙動	112
3.3.3 弾塑性三角ラーメンの解析における整合剛性選択過程	115
3.3.4 弾塑性門形ラーメンの解析における整合剛性選択過程	118
3.4 まとめ	121

第4章 弾塑性骨組の臨界挙動の予測解析	
4.1 序	122
4.2 繰り返し載荷される2層筋かい付鋼骨組の実験を対象とした F E R T - P の予測性能の実証	122
4.2.1 解析対象骨組モデル	123
4.2.2 解析結果	125
4.3 繰り返し載荷によって誘発される弾塑性骨組の臨界挙動	134
4.3.1 解析骨組モデル	134
4.3.2 一方向静的載荷時の挙動	138
4.3.3 定変位振幅繰り返し載荷時のシェークダウン挙動と劣化挙動	140
4.4 まとめ	146
第5章 増分摂動法の動的解析への適用	
5.1 序	148
5.2 増分摂動法による運動方程式の摂動展開	149
5.2.1 複合非線形系の運動方程式	149
5.2.2 状態変数の摂動展開	150
5.2.3 摂動運動方程式	151
5.2.4 時間刻み幅の決定	152
5.3 弾塑性骨組の動的臨界挙動予測解析プログラム F E R T - P D	154
5.4 門形平面鋼骨組の地震時挙動の解析における増分摂動法と 増分型平均加速度法の比較	154
5.4.1 解析骨組モデル	155
5.4.2 弾性応答解析	156
5.4.3 弾塑性応答解析	157
5.5 まとめ	163
結 章	166
APPENDIX: 弾塑性平面骨組の静的臨界挙動解析用プログラム F E R T - P の概要	
参考文献	183
付録: 発表論文一覧	190
謝 辞	194

はじめに

本論文では、有限要素などによって離散化された構造物モデルの弾塑性解析における整合剛性選択問題を初めて論理的に取り上げている。ある増分ステップの剛性行列を確定する過程で、有限個の降伏要素の剛性係数の組み合わせがその候補として循環して選択され、構成則に整合する剛性行列が形成できないという数値解析を遂行する上での極めて重要な問題に対して、循環に陥る際の特徴を明確にし、合理的に整合剛性行列を形成する要素剛性係数の組み合わせを見出すことができる新しいアルゴリズムを提案している。さらに、そのアルゴリズムを含み、一次元有限要素によってモデル化された弾塑性平面骨組の挙動を、たとえそれが分岐点挙動や分岐点近傍挙動のような微妙な性質をもつ挙動であっても、定性的に正確でしかも要求に応じた精度で確実に追跡できる解析法を提示している。

従来の骨組の複合非線形解析法は、どの方法も増分刻み幅の設定に合理的な規範がなく、使用者は何らかの判断によって解析対象ごとに増分刻み幅を設定しなければならなかった。また、材料の非線形性、特に除荷の取り扱いに関して曖昧さが存在し、材料履歴の追跡が厳密でないという問題があった。これらの2大問題点が本質的に克服できないために、従来の骨組の複合非線形解析法は、どのような弾塑性挙動でも精確かつ確実に追跡できるというほどの信頼性を獲得することができなかった。この2大問題点を根本的に解消するには、複合非線形挙動の高精度追跡法として中村恒善・上谷宏二らによって1970年代前半に提案されながら、これまで殆ど実用化されていない増分摂動法[1~4][†]を導入する必要がある。しかし、その増分摂動法においても解決されていない問題がある。その問題は、複合非線形数値解析法における最後の難題ともいえる材料の構成則に整合する要素剛性係数の組み合わせを見つける問題である。特に弾塑性臨界挙動の解析では、整合する剛性係数の組み合わせが合理的にかつ確実に選択される保証がなければ、解析法の信頼性は得られない。本研究では、単純な弾

[†] 角括弧 [] 内の数字は、巻末の参考文献番号を示す。また、右丸括弧) を伴った数字は、巻末付録の著者発表論文一覧の番号である。

塑性柱モデルの整合剛性選択過程が循環過程に陥るメカニズムを解明し、その知見に基づいて循環過程に陥ることのない極めて効果的な新しいアルゴリズムを論理的に導き出している。

本研究で提案する骨組の複合非線形解析法は、一次元有限要素を用いて実用規模平面骨組の大変形解析に適用できるよう増分摂動法を工夫して導入した解析法であり、降伏点や除荷開始点を増分摂動法によって合理的に予測し、それに基づいて全ての要素の材料履歴を精確に追跡できる増分刻み幅を、各増分ステップで自動的に決定する機能を有している。さらに、その解析法には、整合剛性選択過程が循環過程に陥ることのない合理的な整合剛性選択アルゴリズムが組み込まれている。この解析法の完成によって、従来の解析法では扱い得なかった複数部材の相次ぐ座屈現象を含むような弾塑性骨組の挙動の追跡も可能となり、種々の骨組の臨界挙動を今までにない高い精度と信頼性をもって把握することができるようになった。

この章では、まず0.1節で構造物の臨界挙動、主に分岐点近傍挙動の予測解析に関する既往の研究について概観し、臨界挙動解析における増分摂動法の位置付けを述べる。増分摂動法に依らない既存の弾塑性骨組解析法でも極限点挙動の予測解析を行なうことは比較的容易であるが、分岐点近傍挙動の予測解析は、たとえ不整を導入することによって極限点挙動に移行させて解析を行なうにしても、それを遂行することは容易ではない。解析の遂行が困難となる一つの大きな理由は、しばしば整合剛性選択過程が循環過程に陥るためである。0.2節では、整合剛性選択過程が循環過程に陥った場合の従来の対処法と本研究における方針を述べる。0.3節では、増分摂動法とともに、本研究で提案する解析法のもう一つの母体ともなった中村恒善・石田修三らによる弾塑性骨組の静的及び動的なたわみ解析法[5~9]の基本的特徴を述べる。0.4節では、骨組の臨界挙動予測解析法が満たすべき条件を挙げ、その一つの条件を満たすために本研究で導入された増分摂動法の定式化において新たに工夫された点を述べる。最後に、本論文を構成する各章の概要と既発表論文との関係を示す。

0.1 構造物の臨界挙動の予測解析に関する歴史的展望

建築構造物の力学的安全性を評価するには、基準となる臨界状態、すなわち静的釣合経路における分岐点や極限点、あるいは動的応答の相曲線における鞍点などの臨界点やそれに類する限界状態を正確に把握するとともに、それらの臨界状態近傍の挙動やその後の挙動の特性を解明しておく必要がある。

構造物の臨界挙動に関する既往の研究については、中村・上谷の文献[10]や中村の文献[11~14]に詳細に解説されている。また、弾性安定問題の解析における摂動法の取り扱いについては半谷が文献[15]で紹介している。本節では、本研究で提案する解析法で導入した増分摂動法の位置付けを構造物の臨界挙動の予測解析という観点から述べる。

0.1.1 分岐点および分岐後釣合経路

弾性連続体構造物の臨界点後挙動と臨界点の不整感度特性に関する一般論的研究は、1945年のKoiterの学位論文[16]に始まる。Koiterは3次元弾性体の初期座屈後挙動を求める一般的手法として、臨界点近傍でのTaylor級数展開を用いる漸近解析法を示し、臨界挙動の分類ならびに不整感度特性を明らかにしている。弾性離散系の臨界挙動に関する一般理論は1963年にThompsonによって発表され[17,18]、その後の研究の種々の成果はThompson・Huntの著書[19]に集大成されている。ThompsonもKoiter同様、臨界点近傍でのTaylor級数展開を用いている。

一方、弾塑性構造物の臨界挙動に関する研究は、1947年のShanleyの論文[20]に始まる。Shanleyは剛体と弾塑性ばねよりなる2自由度単純モデルを用い、分岐点条件と分岐後経路を示した。一般の剛塑性または弾塑性連続体の分岐条件は、1957年から1961年にかけてのHillの論文[21~23]における増分解の唯一性および安定性に関する諸定理の誘導によってほぼ確立されている。分岐後挙動については、1965年にSewellがShanleyモデルを用いた論文[24]を発表している。Sewellはこの論文でTaylor級数展開を用いる方法を静的摂動法(static perturbation method)と呼んでいる。連続体の分岐後挙動に関する一般的定式化は、1973年にHutchinsonによって初めて提示された[25]。そこでは、接線係数荷重点から発する分岐直後の経路について、除荷域境界の伝播を考慮した定式化が示され、ここでも、摂動法を適用して分岐後経路解の級数展開表現を求める方法が用いられている。

分岐後挙動に対してKoiter, Thompsonらが用いたTaylor級数展開の方法は、種々の弾性体構造物の釣合経路の追跡問題に対しても有用である。このことはWalkerの1969年の論文[26]に示されており、翌1970年にはRoorda・Chilverが、弾性骨組の座屈問題にTaylor級数展開の方法を適用している[27]。また、半谷・川股は1972年に分岐点での摂動方程式の係数行列の対角化を行なわない定式化を示し、弾性立体トラスへの適用結果を示している[28]。半谷は文献[29]に、摂動法と増分区間を線形近似した増分法（荷重増分法および変位増分法）のそれぞれによる弾性立体トラスの座屈解析結果を提示し、摂動法が他の2つの増分法に比してよい精度で釣合経路を追跡できることを示している。しかし、弾性域での釣合経路の追跡は、臨界点近傍であっても摂動法を用いずに実行することができる。増分法における増分パラメータとして釣合経路の弧長を採用する弧長増分法[30～32]は、Newton-Raphson収束過程との組み合わせによって、極限点のみならず分岐点近傍の経路追跡も可能であり、計算効率を考慮すると摂動法よりも弧長増分法の方がよいという報告もある[33]。

一方、弾塑性域での釣合経路の追跡問題の解析では、材料の履歴を記憶しながら釣合状態の変化を刻々追跡しなければならない。特に、臨界点近傍挙動の解析では、釣合経路の進行方向が急変する場合が多く、それに伴う材料履歴の扱いを厳密に行なわなければ、予測経路解は大きな誤差を含み、これによって正解とは全く異なる方向に進行する場合もある。弾性解析では有効な不釣合力解除のための収束計算も、弾塑性域での解析では構成則が材料の履歴に依存するために正当化されず、合理的に誤差を減少させる方法にはならない[4]。したがって、弾性臨界挙動予測解析では極めて効率的な解析法である弧長増分法も、弾塑性臨界挙動予測解析においては有効ではない。1972年に上谷は多軸応力場の塑性流動則のTaylor級数展開表現を初めて示し、これに基づいて降伏、除荷などの材料の塑性法則を精確に遵守すること、各変数増分解に含まれる相対誤差を設定された限界範囲内に収めること、ならびに臨界点の対処法などを統一的に含んだ複合非線形解析法を提案している[2]。この方法は、1976年に横尾・中村・上谷によって増分摂動法(incremental perturbation method)と名づけられて発表されている[1]。

「整合剛性選択問題」とは、有限要素などによって離散化された構造物モデルの材料非線形性を伴う解析において、ある増分ステップで全ての要素のひずみ速度（あるいは応力速度）の符号と構成則に関して整合する要素剛性係数の組み合わせを見つけだすという問題である。各増分ステップで、最初候補として選択した剛性係数の組み合わせを用いて算定された要素のひずみ速度が、その構成則と矛盾する符号をもつ場合、同一ステップ内で先に算定されたひずみ速度の符号に整合する要素剛性係数に変更し、再度ひずみ速度を算定する必要がある。この再計算過程はすべての要素のひずみ速度とその剛性係数の整合性が確かめられるまで繰り返されなければならない。時に、この整合剛性選択過程が複数の組み合わせの循環選択、いわゆる堂々巡りに陥り、構成則に関して整合する要素剛性係数の組み合わせが見出せず、解析を続行することが不可能な事態が生ずることがある。以下、この剛性選択過程が循環に陥る過程を「循環剛性選択過程」と呼ぶ。

0.2.1 循環剛性選択過程に陥った場合の従来の対処法

循環剛性選択過程に対する素朴な解決法は、全ての起こり得る剛性係数の組み合わせを尽くすという方法である。しかし、多数の要素から成るシステムでこれを実行することは現実的ではない。従来、最も妥当と考えられている手法は、循環剛性選択過程に陥る要因を要素の材料履歴経路の追跡における誤差であると考え、それに対して循環剛性選択過程に陥ったステップより以前のステップの増分刻み幅を小さくして再計算を行ない、何とか循環剛性選択過程に陥らない増分刻み幅を見出すという試行錯誤的手法である。こうした手法によらず、循環剛性選択過程に陥ったステップの剛性係数の組み合わせを何らかの判断を下して与え、解析を続行するということも考えられるが、そのような解析で得られた挙動予測は、どれほどの信頼性があるかは不明であり、もし誤った判断が行なわれた場合には挙動予測の信憑性そのものを問われることになる。

増分摂動法に依らない従来の弾塑性骨組の複合非線形解析法は、一般に線形増分型の解析法である。この種の解析法では、その増分パラメータの刻み幅を設定する合理的規範はなく、解析対象が変わるたびに使用者は何らかの判断基準によって適当に増

分刻み幅を与えなければならない。従来の線形増分解析法でも、材料の降伏点を精確に、あるいは設定された許容範囲内に納めることは可能であり、降伏点を精確に捉えるよう増分刻み幅を自動設定することはできる。一方、応力ひずみ状態点が塑性経路上にある要素の除荷は、そのステップのひずみ速度の符号で判定される。したがって、除荷開始点ひずみはそのステップ開始時のひずみとなり、材料履歴の追跡に必ず誤差を含む。臨界挙動の解析、なかでも分岐点近傍の挙動を解析する場合には増分刻み幅の与え方によっては、材料の構成則に整合する要素剛性係数の組み合わせが選択できなくなる循環剛性選択過程に陥ることがあり、解析を遂行することのできる増分刻み幅の設定は非常に困難な問題となる。こうしたことから循環剛性選択過程に陥る原因は増分刻み幅の設定に伴う応力ひずみ経路の追跡誤差であると考えられている。従来の解析法では、降伏点あるいは除荷開始点をより精確に捉えるためには、増分刻み幅を小さくしていく以外に方法はない。それゆえ、循環剛性選択過程が生じた場合、その解析の最初からあるいは循環剛性選択過程に陥ったステップの何ステップか前から増分刻み幅を小さくして再計算を行なうという対処法が考えられる。

この対処法では、どれだけ増分刻み幅を小さくすれば構成則に矛盾しない剛性係数の組み合わせが選択できるかを前もって知ることは不可能であり、また、計算経済上、全計算過程の増分刻み幅を小さくすることは通常困難である。したがって、循環剛性選択過程に陥る可能性の高い臨界挙動解析では、多くの試行解析によって計算過程をいくつかの区切り、その区切り毎の適当な増分刻み幅を与えるための予備手続きが必要である。

本研究者はこれまでこの対処法を採用してきた。しかし、この対処法で増分刻み幅を相当小さくしても整合性のある剛性係数の組み合わせを選択することができないという事態に陥ることも経験した。循環剛性選択過程に対する工夫は、発表されることは極めて少ないが、おそらく複合非線形解析に携わっている他の研究者も上述と同様の対処法あるいは類似の手法を採用していると思われる。

0.2.2 剛体-ばね柱モデルによる整合剛性選択過程の検討

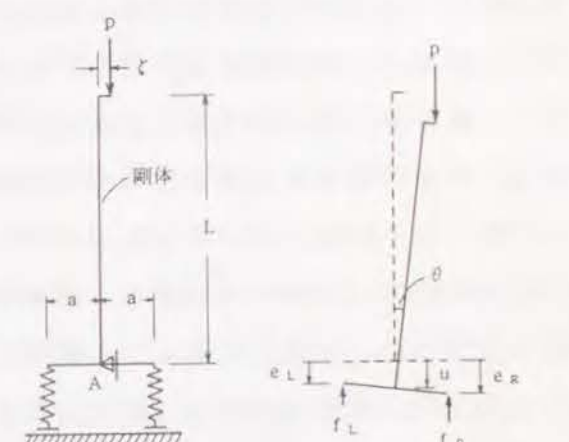
本研究では、「はじめに」で述べたように要素の応力ひずみ経路の追跡を降伏点のみならず除荷開始点をも確実に捉えて行なうよう実用規模骨組の弾塑性解析法に初めて増分摂動法の導入を行ない、増分刻み幅設定の合理的な完全自動化を図っている。したがって、各要素の応力ひずみ経路の追跡精度は格段に上昇することになり、もし、

解析時に循環剛性選択過程に陥る要因が応力ひずみ経路の追跡精度によるものであれば、そうした過程に陥る可能性は非常に小さくなるはずである。しかし、循環剛性選択過程に陥るメカニズムそのものを論じた研究は見当たらず、はたして、応力ひずみ経路の追跡精度の向上によって、剛性選択過程における堂々巡りが本質的に回避できるものであるかどうかは不明である。増分摂動法の提案者である上谷も文献[34]で、「各要素の降伏点、除荷点を丹念に追跡することで、循環的選択過程はある程度回避できる」と述べるに止まっている。

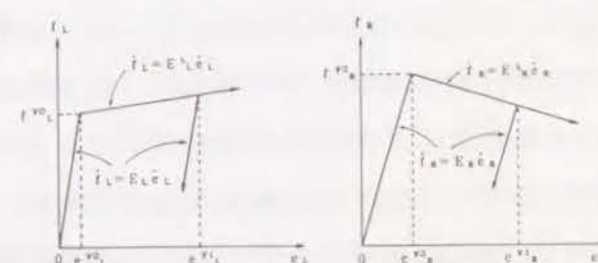
それゆえ、本研究では、循環剛性選択過程に陥るメカニズムの解明への足掛りとして、弾塑性数値解析時に計算機の中で行なわれている剛性選択過程を考察する目的で図-0.1に示す偏心鉛直荷重を受ける2つの弾塑性ばねに支えられた剛体-ばね柱モデルの解析的検討を行なっている。このモデルでは、2つのばねの剛性係数の選択過程を完全に把握することができ、また、ばねの剛性係数の全ての組み合わせについて、ばねの縮み速度との整合性を厳密に検討することができる。

このモデルが循環剛性選択過程に陥る状態を捉え、その場合には速度型釣合方程式の剛性行列が正定値でなくなることを見出している。そのときの剛性行列の正でない固有値に対応する固有ベクトルを用いて、循環剛性選択過程に陥らない方法を考案している。この方法は、このモデルの塑性分岐経路の追跡にも有効である。

この方法に基づいて弾塑性解析法の整合剛性選択アルゴリズムを作成し、本研究で提示している解析法に組み込んでいる。本研究で得たアルゴリズムは、増分刻み幅を適当に小さくすることによって出来るだけ循環剛性選択過程に陥らないことを期待する従来の対処法とは異なり、合理的に導かれた整合剛性選択アルゴリズムであり、例題によってその有効性が実証されている。



(a) 剛体-ばね柱モデル



(b) ばねの力-縮み関係の一例

図-0.1 整合剛性選択過程検討のための単純モデル

この節では、増分摂動法とともに、本研究で提案する骨組の臨界挙動予測解析法のもう一つの母体ともなった中村恒善・石田修三らによる一次元有限要素を用いた弾塑性骨組の静的及び動的な大たわみ解析法[5～9]のこれまでの展開と基本的特徴を概括する。

外乱に対して構造物の安全性を明確に評価するためには、その外乱下でその構造物が終局状態に至るまでの挙動をできるだけ正確に把握しておくことが必要である。骨組構造物を対象として終局状態までの解析を実施するには、大変形に伴う軸力効果（ $P-\Delta$ 効果）などの幾何非線形性やひずみ硬化などの材料非線形性を精確に考慮に入れた複合非線形解析法が必要である。コンピュータの発達によって、1960年代後半によろやく高層骨組の極限点を越える解析が実行できるようになった。1969年の第4回世界地震工学会議で棚橋・金多・中村・石田は、弱梁強柱高層骨組の極限点以降を含む静的一方向弾塑性挙動の解析結果を発表した[35]。そこでの解析法は、 $P-\Delta$ 効果を考慮し、塑性変形域を塑性関節に集約したモデルを用いた複合非線形解析法であり、極限点以降の解析のために変位増分法が提案されている。さらに、中村・石田らは、ひずみ硬化による塑性域の成長縮退を考慮できる一次元複合非線形有限要素法の研究に取り組み、1973年にその当時のコンピュータでも実用規模の重層鋼構造平面骨組が静的および動的に崩壊する過程を追跡することができる数値解析法を初めて提案した[5～9]。それを可能にした要因は、移動座標系の採用と要素の直列性に着目した伝達行列法の使用である。剛体運動座標と呼ぶ要素に付随して移動回転する座標系の採用によって、材軸方向に細分化された個々の要素の変位は、剛体変位と正味の變形に分離して取り扱うことができ、要素の局所剛性を精度よく構築することができる。また、伝達行列法を用いることによって最終的に解くべき全体系の方程式の元数は各部材の分割要素数にかかわらず、部材節点ごとに設けられた系座標の数となり、よく知られた線形弾性骨組の解析における元数まで低減できる。剛体変位分離と伝達行列法の手法とを組み合わせるという工夫は、この解析法において初めて行なわれた。石田はこの解析法によるプログラムを剛体運動座標と伝達行列法という2大特徴に因んで、FERT (Finite Element method with Rigid-body-motion-coordinates and Transfer matrix technique) と名づけた[36]。

発表当初、この解析法で採用されていた移動座標は、片持梁型のものであった。正味の變形と剛体変位を分離するという点では、要素両端を結んだ直線を材軸とする単

純梁型の方が効果的であることは明らかであり、1980年の文献[14]で単純梁型移動座標を用いた定式化過程が示された。また、要素長が十分小さく、増分ステップ長があまり大きくない場合には、増分型ひずみ変位関係式を線形近似しても所要の精度が保たれることが文献[15]で示された。その後、弾性幾何非線形解析における要素数を減らす目的で曲げ縮みを考慮した変位関数を利用したFERT-Bと呼ぶプログラムも提案されている[4], [28]。

0. 4 弾塑性骨組の臨界挙動予測解析のための増分摂動法

0.4.1 本研究で提案される解析法の満たすべき条件

1981年に改正された建築基準法では、大地震に対する建築物の安全性を確認するために建物各層の保有水平耐力および構造特性を表わす係数 D_s を評価することが求められている。比較的整形の建物では保有水平耐力の算定、 D_s 係数の評価ともさほど困難ではないが、筋かいのような劣化要素を含む骨組や不規則な形状をもつ骨組では、保有水平耐力の算定を行なうことが容易でない場合も生じる。そうした場合には、いわゆる挙動追跡ができる弾塑性解析法による精算を行なうことが望ましい。

また、近年、建築物の安全性や使用性・居住性に関する諸条件を合理的に満足させる目的で確率統計的評価を取り入れた限界状態設計法[37]や、構造物の応答性状が設計者の意図したものとなるように設計パラメータを決定する性能制御設計と呼ばれる設計法（設計力学）[38]が提唱されている。こうした設計手法を実際に普及させていくためにも、構造物の限界状態や挙動性状の評価が、正確に行なわれる方法の確立が必要である。これまで構造物あるいはその部分構造の挙動の解明、評価には、多くの場合、相似模型供試体や部分構造または部材の実大供試体を用いた実験が行なわれるのが一般的であった。しかし、実験的手法のみでは実験装置の限界（単に供試体や装置の規模、境界条件の問題だけではなく、統計的評価に必要な同一条件の再現性などの問題も含む）あるいは相似則の欠如、さらにその実験に要する多大な経費と時間といった問題によって実施が困難と考えられる場合も多い。これに対し、近年のコンピュータ性能の飛躍的発展を考えれば、実験に代わる有力な手法として、あるいは実験をより効率よく実施するための実験支援システムとして、数値シミュレーションの採用がこれまで以上により積極的に導入されていくと予測される。

したがって、本研究で提案される解析法は、次の解析要求に答えることが望まれる：

【解析要求】 実用規模の任意形状骨組の保有水平耐力の精算に使用でき、かつ、静的および動的な新たな臨界状態や挙動性状の解明に利用できる。

上記の【解析要求】に高い信頼性で答えるためには、「はじめに」で述べたように、弾塑性骨組のどのような臨界挙動でも精確かつ確実に追跡できる解析法でなければならない。そのためには次の2点の条件を満たす必要がある：

【条件1】 材料の弾塑性履歴モデルを精確に取り扱うことができ、各増分ステップで合理的に増分刻み幅を自動決定する機能を有する。

【条件2】 循環剛性選択過程から脱出できる合理的な整合剛性の選択アルゴリズムを具備する。

本研究では、【条件1】を満たすため、複合非線形解析における材料の弾塑性履歴モデルとしての構成則の正確な遵守という問題に対して、中村恒善・上谷宏二らによって1970年代前半に提案されながら、これまで殆ど実用化されていなかった増分摂動法[1~4]に着目した。増分摂動法を導入すれば、材料の応力ひずみ関係を除荷開始点まで含めて確実に追跡が行なえるよう、また各増分段階の誤差率を使用者の望む範囲内に収めることができるよう増分刻み幅を自動決定することができる。したがって、解析法使用者が、これまで必ず行なわなければならなかった増分刻み幅の設定に関する判断をする必要がなく、使用者は『増分刻み幅をどうするか?』という問題から完全に解放されることになる。

また、【条件2】を満たすために、本研究では0.2節で述べた単純モデルによる循環剛性選択過程の論理的解明を初めて行ない、従来の試行錯誤的手法とは本質的に異なる合理的な整合剛性選択アルゴリズムの提案を行なっている。

0.4.2 増分摂動法の導入における新たな工夫点

前項で述べた【解析要求】を考慮すると、増分摂動法による解析法基礎式の定式化に際し、特に次の2点に留意しておかなければならない：

(留意点-1) 大たわみ域での予測精度が十分確保されること。

(留意点-2) 現在の計算機環境の中で実用規模骨組の解析が可能であること。

2つの留意点を満足するために、解決しなければならない問題として、次の三つの問題がある：

[問題-1] 公表されている増分摂動法は、固定座標系で非線形ひずみ変位関係式を用いたものである。高次の摂動係数まで求めれば精度は良くなるが、固定座標系では要素の剛体回転量が大きくなると、その精度は保証されなくなる。

[問題-2] 最終的に解くべき摂動方程式の元数の低減手法は示されておらず、大規模システムの解析には問題がある。

[問題-3] 多自由度系の動的問題に対する増分摂動法による定式化は示されていない。

これらの問題に対して、本研究者が、どのような工夫で[問題-1]~[問題-3]を克服し、新たな解析法を提案したかを以下に要約する：

[問題-1]に対して； 部材の座屈現象を含むような骨組の臨界挙動は、微小ひずみ大たわみ問題として取り扱え、その挙動予測解析法で移動座標系を採用することは精度を保つ上で効果的である。移動座標系を用いた上で増分摂動法による定式化ができれば、さほど高次の摂動係数まで求めなくとも、高精度の解析が実現できる可能性がある。しかし、移動座標系を採用する場合には、基準となる固定座標系との間の座標変換行列を摂動展開する必要がある。この摂動展開は一見複雑なように思われるが、本研究者はその座標変換行列が周期関数で構成されており、その性質を利用すれば、摂動展開はそれらの周期関数の2次の導関数まで求めておけばよいことに気づいた。さらに、移動座標系の採用で線形のひずみ変位関係式を用いても精度が十分保たれると予想されることから、それを採用し、摂動演算を座標変換行列の有利な特性が極力活用されるよう定式化を行なった。線形のひずみ変位関係式の採用は、材料定数が変わらない限り、大たわみにおいても移動座標系で記述された要素剛性行列の変更を要しない点でも計算効率上有利である。

[問題-2]に対して； 実用規模骨組の解析を行なうには、解くべき摂動方程式の元数を低減することは不可欠な要求である。本研究者は隣合う要素端の状態量速度ベクトル間の関係式を摂動展開することで、伝達行列法が増分摂動法でも適用できることを示し、解くべき全体系の摂動方程式の元数を部材の要素数に関わらず一定とすることができると示した。

[問題-3]に対して； 動的弾塑性応答解析における従来の数値解析法は、本質的に数値モデルとしての構成則を厳密に満たすことは不可能である。増分摂動法の特質を利用すれば、この問題は解消されるはずであり、動的問題への増分摂動法の一般的適用手法を示すことは極めて意義深いことである。それゆえ、動的解析における多自由度系の摂動方程式を導き、その解法手順を示した。各増分段階で変位の摂動係数ベクトルを求める主要演算は質量行列の逆行列と外力、復元力、減衰力の摂動係数ベクトルとの積である。質量行列は通常応答時間を通じて一定であるので、その逆行列の計算は一度行なっておけばよい。従来の数値積分法でしばしば問題となった解の発散は、増分摂動法によれば各ステップで誤差を制御しながら時間刻み幅を自動決定するので全く問題とならない。

本研究で提案される弾塑性骨組の臨界挙動予測解析のための増分摂動法は、0.3節で述べた解析法の特徴である移動座標系の採用による大たわみ域での精度の確保、および伝達行列法の利用による方程式の元数の低減という2大利点を保持するように工夫して定式化が行なわれている。それゆえ、ここで提示される数値解析プログラムは、0.3節のFERTと摂動法のPerturbationに因んで、FERT-Pと呼ばれる。なお、動的解析法はFERT-PDと呼ばれる。

0.5 本論文の構成および既発表論文との関係

本論文は、弾塑性骨組の静的釣合経路の分岐点や動的相曲線の鞍点などの臨界点あるいはその近傍を通る経路をも、これまでにない高い精度と信頼性をもって確実に追跡できる臨界挙動予測解析法を提示し、その予測性能を検証するために行なった解析の結果をまとめたものであり、その一部は論文として既に公表されている。

本論文は、序章、本論5章および結章から構成されている。

序章では、まず本解析法の基礎理論となっている増分摂動法の臨界挙動解析における位置付けと整合剛性選択問題に対する研究方針、および本解析法のもう一つの母体となった弾塑性骨組の大たわみ解析法の特徴を述べている。次に、実用規模骨組の臨界挙動予測解析法が満たすべき条件を挙げ、増分摂動法による解析法の定式化において工夫した点の概要を述べている。

第1章では、バイリニア力-縮み関係に従う2つのばねで支えられた剛体-ばね柱モデルを用いて、整合剛性選択問題の理論的検討を初めて行なっている。制御変数の増分方向を指定すると2種類の循環剛性選択過程が存在することを明らかにしている。2つのばねがひずみ硬化ばねであり、鉛直荷重が増加しているとき、剛性選択過程が循環に陥る要因はひずみ硬化進行中のばねの除荷開始点が精確に捉えられないことであることを解明し、塑性分岐点近傍では循環剛性選択過程に陥る可能性が高くなる理由を論理的に説明している。さらに、循環剛性選択過程に陥る場合には、その系方程式における剛性行列が正定値でなくなることを明らかにし、そのときの剛性行列の正でない固有値に対応する固有ベクトルを利用することによって、合理的にばねの構成則に整合する剛性係数の組み合わせを選択することのできる極めて効果的な方法を提案している。

第2章では、移動座標系の採用に伴う座標変換の摂動展開、伝達行列法の増分摂動法における定式化過程を示し、実用規模平面骨組の複合非線形解析法基礎式を増分摂動法によって誘導している。また、第1章で得られた知見を基に整合剛性選択アルゴリズムを作成し、FERT-Pと呼ぶ解析プログラムを提示している。増分摂動法を用いたことで、骨組の複合非線形解析法で初めて材料の弾塑性履歴モデルの精確な取り扱いが可能となり、各増分ステップでの増分刻み幅を合理的に自動決定することができるようになった。これらの利点に加えてここで提案した解析法は、合理的な整合剛性選択アルゴリズムを具備しており、弾塑性骨組の静的臨界挙動の予測解析を高精度にかつ確実に行なうことができる。本章の概要は文献10), 29)に全貌は文献5)に発表している。

第3章では、理論解が与えられている弾性分岐挙動の解析、ならびに繰り返し軸方向力を受ける鋼部材の実験を対象とする予測解析を行ない、FERT-Pプログラムが極めて高い予測性能をもつことを検証している。さらに、弾塑性三角ラーメンの予測解析などによって、第2章で提案した整合剛性選択アルゴリズムの有効性を実証している。本章の解析結果は文献5), 10), 12), 29)に発表している。

第4章では、繰り返し水平力を受ける2層筋かい付鋼骨組の実験を対象とする予測解析を行ない、両層の筋かい材が相前後して座屈する極めて複雑な弾塑性不安定挙動の解析もFERT-Pプログラムを用いれば非常に良好な精度で、しかも制御のため

1. 1 序

骨組構造物を一次元有限要素によって離散化して弾塑性解析を行なう場合、応力ひずみ状態点が一軸の応力ひずみ関係の塑性経路上にある要素の材料層では、ひずみ速度の符号に応じて構成則に矛盾しない剛性係数を選択する必要がある。各増分ステップにおいて、ひずみ速度の符号とそのステップで設定した剛性係数が矛盾していないかどうかを判定して、もし矛盾している要素の材料層があれば、その剛性係数を変更して、再度同ステップの計算をやり直さなければならない。この剛性係数の変更は全ての要素の材料層でひずみ速度の符号とその剛性係数が構成則と矛盾していないことが確認されるまで繰り返されなければならない。この整合剛性選択過程が、時に、循環剛性選択過程いわゆる堂々巡りに陥り、計算の遂行が不可能な事態が生じることがある。

循環剛性選択過程に対する素朴な解決法は、全ての起こり得る剛性係数の組み合わせを尽くすという方法である。しかし、多数の要素からなる骨組システムで、これを実行することは現実的ではない。

整合剛性選択過程が循環選択過程に陥るメカニズムを明確にし、循環過程から合理的にかつ確実に脱出する方法を確立することは、現在、材料非線形解析問題における最重要課題であると言える。本章では、弾塑性数値解析時に計算機の中で行なわれている剛性選択過程を考察する目的で、偏心鉛直荷重を受ける2つの弾塑性ばねに支えられた剛体-ばね柱モデルの解析を行なっている。このモデルでは、2つのばねの剛性係数の選択過程を完全に把握することができ、また、ばねの剛性係数の全ての組み合わせについて、ばねの縮み速度との整合性を厳密に検討することができる。ここでは、まずばねの剛性係数の組み合わせ毎に、鉛直荷重と柱回転角による状態平面を、2つのばねの縮み速度の組み合わせとその剛性係数の組み合わせとが整合する領域と矛盾する領域に区分けしている。次に、これを用いて循環選択過程に陥るメカニズムを明確に捉え、その知見を基に、全ての剛性係数の組み合わせを尽くさずに、循環剛性選択過程から合理的に整合剛性を選択する手順を提案している。

の予備試行解析を一度も行なうことなく実行できることを実証している。なお、ここで対象とした2層K型筋かい付鋼骨組の解析は、従来のFERTプログラムでは頻繁に循環剛性選択過程に陥るため、解析を遂行することが実質的に不可能であった。この内容は文献5), 10), 11)に発表している。さらに、2層骨組の第1層の柱軸力比を一定に保持しながら骨組の柱頂部と第1層梁中央にそれぞれ作用する定鉛直荷重の割合を変えた一連の骨組について、水平方向に定振幅の繰り返し载荷を与えたときの挙動解析をFERT-Pを用いて行なっている。その結果、荷重比の値によってシェークダウン挙動と崩壊に至る挙動の2種類が存在し、両者を分ける荷重比の臨界値が存在することを見出している。崩壊に至る挙動は繰り返し数がある限度に達したときから急激に劣化が進行する挙動であり、一方向载荷時の挙動からその劣化性状を予測することはできないことを指摘している。

第5章では、増分摂動法による多自由度系の運動方程式の摂動展開表現を導き、これに基づいてFERT-PDと呼ぶ弾塑性骨組の動的臨界挙動予測解析プログラムを提示している。門形鋼骨組の地震時弾塑性挙動解析を、増分摂動法によるFERT-PDと増分型平均加速度法によるFERT-Dとを用いてそれぞれ行なっている。増分摂動法の導入によって従来の数値積分法では本質的に不可能であった動的弾塑性問題における材料非線形性の明確な取り扱いが初めて可能になり、その結果として高い精度の解が得られることが実証されている。FERT-Dの時間刻み幅を小さくして降伏判定をできるだけ精確に捉える工夫を講じれば、その解析結果はFERT-PDの結果に近づくが、FERT-Dでは材料の応力ひずみ関係における除荷開始点を予測することができないという理論的に除去不可能な誤差要因がなお存在するため、FERT-PDに一致する解析結果を得ることは実質的に不可能であり、特に臨界点近傍の挙動予測では、材料非線形性の取り扱いの曖昧さによる誤差が結果に重大な影響を及ぼすことを明らかにしている。本章の内容は文献6), 12)に発表している。

結章では、以上の研究の成果をとりまとめている。

1.2 解析モデル

図-1.1 に示す剛体と弾塑性ばねよりなる Shanleyモデルを用いて解析を行なう。鉛直荷重 p が頂部に ζ だけ偏心して漸増载荷される。モデルの自由度は2で、変形状態は逆T字型剛体部のルートAの鉛直変位 u と回転角 θ で一意に記述される。左右の鉛直ばねの縮み e_L, e_R は一般化変位 u, θ で次式のように書ける。

$$e_L = u - a \sin \theta, \quad e_R = u + a \sin \theta$$

以下、このような式は次のようにまとめて書く。

$$e_{L,R} = u \mp a \sin \theta \quad (1.1)$$

左右鉛直ばね反力 f_L, f_R (圧縮を正として定義する), 鉛直荷重 p をうける剛体部の変形後の状態に対する釣合条件は次のように書ける。

$$p = f_R + f_L \quad (1.2)$$

$$p(L \tan \theta + \zeta) = a(f_R - f_L) \quad (1.3)$$

もし左右の鉛直ばねが同一の線形弾性ばねであれば、ばねの力-縮み関係は、次式で示される。

$$f_{L,R} = E e_{L,R} \quad (1.4)$$

ここに、 E はばね定数である。式(1.1)~(1.4)より、鉛直荷重 p と一般化変位 u, θ との関係を求めると、

$$p = 2 E u, \quad p = \frac{2 E a^2 \sin \theta}{L \tan \theta + \zeta} \quad (1.5a, b)$$

となる。偏心のない場合の系の座屈荷重 p_{Euler} は、 $2 E a^2/L$ であり、式(1.5b)を p_{Euler} で無次元化すると、

$$\frac{p}{p_{Euler}} = \frac{\sin \theta}{\tan \theta + \zeta/L} \quad (1.6)$$

となる。偏心のない場合すなわち $\zeta = 0$ では、 $p/p_{Euler} = \cos \theta$ である。式(1.6)の

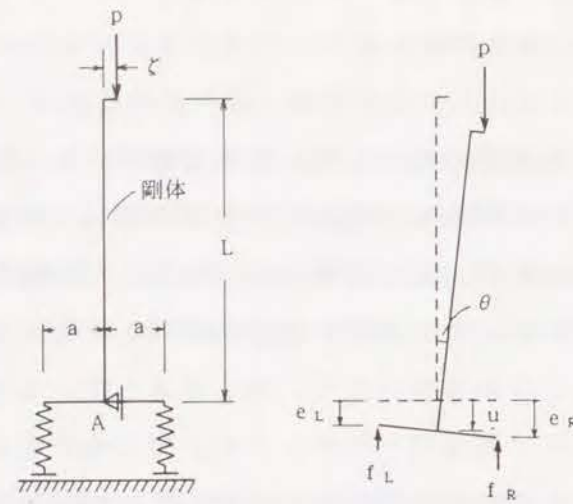


図-1.1 剛体-ばね柱モデル

$p/p_{Euler} - \theta$ 関係を、図-1.2に示す。破線は ζ/L をパラメータとする曲線の極限点を連ねたものであり、 $\cos^3 \theta$ 曲線である。

以下の議論では、左右の鉛直ばねの力-縮み関係は図-1.3 のように2つの傾きの直線で表わされるものとする。塑性時には負の傾きもととり得る。左右のばね力とも圧縮状態にある場合を考える。ばねの最大縮みを $e_{L,R}^{y1}$ とすると、塑性状態では、 $e_{L,R}^{y1}$ は常に更新される。初期状態では $e_{L,R}^{y1} = e_{L,R}^{y0}$ である。以上より、ばねの構成則は次のように書ける。

$$\dot{f}_{L,R} = E_{L,R} \dot{e}_{L,R} \quad \text{for } 0 \leq e_{L,R} < e_{L,R}^{y1} \text{ および } e_{L,R} = e_{L,R}^{y1} \text{ で } \dot{e}_{L,R} < 0 \quad (1.7a)$$

$$\dot{f}_{L,R} = E_{L,R}^t \dot{e}_{L,R} \quad \text{for } e_{L,R} = e_{L,R}^{y1}, \dot{e}_{L,R} > 0 \quad (1.7b)$$

$E_{L,R}$ および $E_{L,R}^t$ をまとめて $C_{L,R}$ で表わすと、式(1.7a, b)は、

$$\dot{f}_{L,R} = C_{L,R} \dot{e}_{L,R} \quad (1.8)$$

となる。ここで、ドットは状態の変化に伴って単調に増加する任意のパラメータ ξ に対する速度を表わす。

左右のばね力は、式(1.2), (1.3)の釣合式から、

$$f_L = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\tan \theta + \zeta/L}{a/L} \right) p, \quad f_R = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\tan \theta + \zeta/L}{a/L} \right) p \quad (1.9a, b)$$

となる。 p が正すなわち鉛直下向きに働くとき、左右のばね力が共に圧縮であるためには、 θ は次の範囲になければならない。

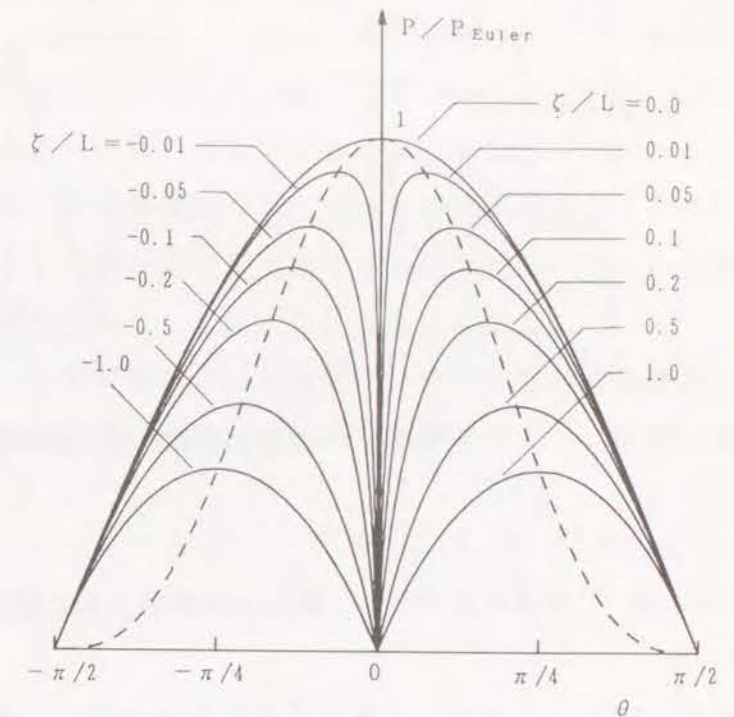


図-1.2 左右同一の線形弾性ばねで支えられた系の力-変形関係

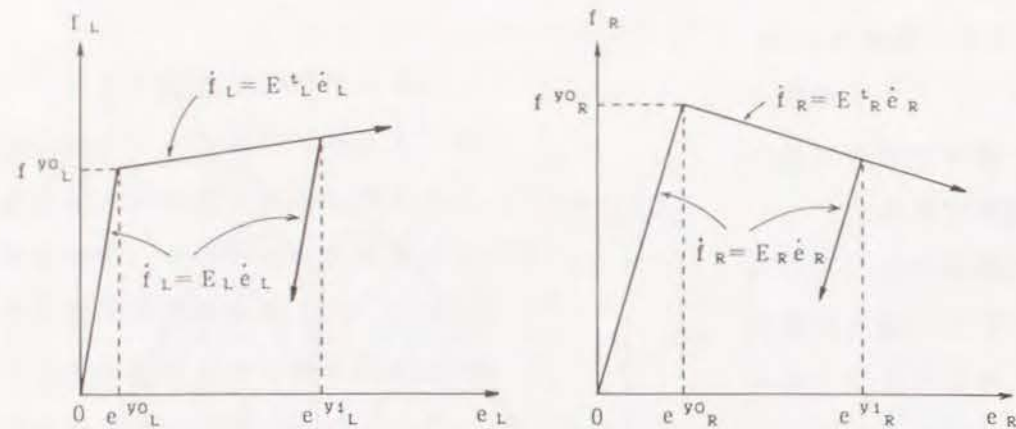


図-1.3 左右のばねの力-縮み関係の一例

$$\theta^{(R)} < \theta < \theta^{(L)} \quad (1.10)$$

ここに、 $\theta^{(R)}$ および $\theta^{(L)}$ は、式(1.9a, b)の f_R , f_L が正であるための条件として求まり、

$$\theta^{(R)} = \tan^{-1}\left(-\frac{a + \zeta}{L}\right), \quad \theta^{(L)} = \tan^{-1}\left(\frac{a - \zeta}{L}\right) \quad (1.11a, b)$$

である。

1.3 制御変数によるばね縮みの速度表示

式(1.8)を用いて、式(1.1)～(1.3)の速度関係式を記述すると、次のようになる。

$$\dot{e}_{L, R} = \dot{u} \mp a \cos \theta_J \dot{\theta} \quad (1.12)$$

$$\dot{p} = (C_R + C_L) \dot{u} + a (C_R - C_L) \cos \theta_J \dot{\theta} \quad (1.13)$$

$$\dot{p} (L \tan \theta_J + \zeta) = a (C_R - C_L) \dot{u} + \{a^2 \cos \theta_J (C_R + C_L) - p_J L \sec^2 \theta_J\} \dot{\theta} \quad (1.14)$$

ここに、 p_J , θ_J はそれまでの解析によって決まっている J 状態の剛体柱のルートの回転角と鉛直荷重である。

数値解析では、式(1.13), 式(1.14)を用いて、状態変数 p , u および θ の J 状態での速度を算定し、式(1.12)よりばねの縮み速度が式(1.7)の構成則に矛盾しないことを確かめた上で、各増分量を求め J 状態の対応する量に加え合わせる。どの状態変数を制御し、系のどういう挙動を求めるかは、解析目的に依存する。例えば、重錘を少

しづつ増やしていくという場合には、 \dot{p} を正として制御し、他の変数の速度を求めることになる。系が不安定になった場合、瞬間的に \dot{p} の符号を逆転させ重錘を減らすことは現実には不可能であろう。安定性を失った瞬間に系は運動を起こし、もし静的解析を実行しているのであれば、解析はその時点で終了しなければならない。しかし、静的釣合経路をあくまで求めるという解析目的であれば、 \dot{p} を負として制御することも考える必要がある。一方、逆 T 字型剛体部のルート A の鉛直下向変位 u あるいはルート A の回転角 θ を制御変数として選ぶことも可能である。ただし、これらの変位を制御することは、現実の実験制御条件としては不自然なものである。

本節では、まず、鉛直荷重 p を制御変数とした場合について、整合剛性検討のもとになるばねの縮み速度の表現を求める。次に、 u , θ を制御変数として同様の表現を求める。

1.3.1 鉛直荷重 p を制御変数とする場合 (解法 p)

荷重速度 \dot{p} に任意の値を与え、一般化変位速度 \dot{u} , $\dot{\theta}$ を未知量として解く場合を考える。式(1.13), (1.14)をまとめて表わすと、次の連立方程式を得る。

$$[K] \{\dot{D}\} = \dot{p} \{G_J\} \quad (1.15)$$

ここに、

$$[K] = \begin{bmatrix} C_R + C_L & (C_R - C_L) a \cos \theta_J \\ (C_R - C_L) a & (C_R + C_L) a^2 \cos \theta_J - p_J L \sec^2 \theta_J \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

$$\{\dot{D}\} = \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}, \quad \{G_J\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ L \tan \theta_J + \zeta \end{Bmatrix} \quad (1.17, 18)$$

であり、式(1.16)の行列 $[K]$ はいわゆる剛性行列である。このとき、 $\det[K]$ は、

$$\det[K] = 4 C_R C_L a^2 \cos \theta_J - (C_R + C_L) p_J L \sec^2 \theta_J \quad (1.19)$$

となる。

$\det[K] \neq 0$ のとき、式(1.15)の方程式より \dot{u} , $\dot{\theta}$ は一意に定まり、

$$\dot{u} = \frac{\dot{p}}{\det[K]} \left[\{(1 - \alpha_J) C_R + (1 + \alpha_J) C_L\} \frac{a^2}{L} \cos^3 \theta_J - p_J \right] L \sec^2 \theta_J \quad (1.20)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{p}}{\det[K]} \{-(1-\alpha_J)C_R + (1+\alpha_J)C_L\}a \quad (1.21)$$

となる。ここに、

$$\alpha_J = \frac{L \tan \theta_J + \zeta}{a} = \frac{\tan \theta_J + \zeta/L}{a/L} \quad (1.22)$$

であり、 α_J は系の幾何形状パラメータ a/L と荷重偏心パラメータ ζ/L に依拠し、J状態の回転角 θ_J によって決まる量である。さらに、式(1.12)より左右ばねの縮み速度 $\dot{e}_{L,R}$ は次のようになる。

$$\dot{e}_L = \frac{\dot{p}}{\det[K]} \{(1-\alpha_J) \frac{2C_R a^2}{L} \cos^3 \theta_J - p_J\} L \sec^2 \theta_J \quad (1.23a)$$

$$\dot{e}_R = \frac{\dot{p}}{\det[K]} \{(1+\alpha_J) \frac{2C_L a^2}{L} \cos^3 \theta_J - p_J\} L \sec^2 \theta_J \quad (1.23b)$$

ここで、左ばねの弾性および除荷時の剛性係数 E_L を基準量として、次の諸量を導入する。

$$p^{E_L} = \frac{2E_L a^2}{L} \quad (1.24)$$

$$\gamma_R = C_R/E_L, \quad \gamma_L = C_L/E_L \quad (1.25a, b)$$

p^{E_L} は、左右のばねが同一の弾性剛性係数 E_L を有するときのEuler座屈荷重である。

p^{E_L} 、 γ_R および γ_L を用いて、式(1.20)、(1.21)および(1.23)を書き直すと、

$$\dot{u} = \frac{\dot{p}}{\det[K]} \left[\frac{1}{2} \{(1-\alpha_J)\gamma_R + (1+\alpha_J)\gamma_L\} \cos^3 \theta_J - p_J/p^{E_L} \right] p^{E_L} L \sec^2 \theta_J \quad (1.26)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{p}}{\det[K]} \frac{1}{2} \{-(1-\alpha_J)\gamma_R + (1+\alpha_J)\gamma_L\} \frac{L}{a} p^{E_L} \quad (1.27)$$

$$\dot{e}_L = \frac{\dot{p}}{\det[K]} \{(1-\alpha_J)\gamma_R \cos^3 \theta_J - p_J/p^{E_L}\} p^{E_L} L \sec^2 \theta_J \quad (1.28a)$$

$$\dot{e}_R = \frac{\dot{p}}{\det[K]} \{(1+\alpha_J)\gamma_L \cos^3 \theta_J - p_J/p^{E_L}\} p^{E_L} L \sec^2 \theta_J \quad (1.28b)$$

となる。

$\det[K] = 0$ となるときの p_J を p^C と表記することにとすると、式(1.19)より、

$$p^C = \frac{4C_R C_L}{C_R + C_L} \frac{a^2}{L} \cos^3 \theta_J = \frac{2\gamma_R \gamma_L}{\gamma_R + \gamma_L} p^{E_L} \cos^3 \theta_J \quad (1.29)$$

である。なお、 $E_{L,R} > 0$ であり、塑性剛性係数 $E_{L,R}^p$ は共に0となる場合は考えないものとする。ばね C_R および C_L が同時に0となることはない。式(1.29)を用いて、式(1.19)を表わすと、次のようになる。

$$\det[K] = \left(\frac{2\gamma_R \gamma_L}{\gamma_R + \gamma_L} \cos^3 \theta_J - p_J/p^{E_L} \right) (\gamma_R + \gamma_L) E_L p^{E_L} L \sec^2 \theta_J \quad (1.30)$$

$p_J = p^C$ のときの解の性質を考えるために、式(1.15)の速度型釣合式を対角化する[18, 19, 29, 32]。このとき行列 $[K]$ の固有値の1つが0となる。式(1.18)の $\{G_J\}$ の対角化されたときの第1成分は、次の式(1.31)を満たす θ_J 以外のとき非0であり、この解は極限点を意味する。一方、式(1.31)を θ_J が満たし、 $\gamma_R = \gamma_L$ のとき、この解は分岐点である。

$$\tan \theta_J = \frac{\gamma_R - \gamma_L}{\gamma_R + \gamma_L} \frac{a}{L} - \frac{\zeta}{L} \quad (1.31)$$

ばねの縮み速度の正負を考える。これは、式(1.28)より、制御変数 p の速度に正負どちらの値を与えるか、その時点の状態 (p_J, θ_J) における $\det[K]$ の正負、および p_J/p^{E_L} と $(1-\alpha_J)\gamma_R \cos^3 \theta_J$ 、あるいは $(1+\alpha_J)\gamma_L \cos^3 \theta_J$ との大小関係によって決まることがわかる。制御変数 p の速度を正負どちらかに規定し、 $p_J/p^{E_L} - \theta_J$ 平面において、左右のばねの縮み速度の正負の組み合わせに関する領域分けを考える。この領域分けは、次の3つの曲線でなされる：

$$\text{曲線 I} \cdots \cdots p_J/p^{E_L} = \frac{2\gamma_R \gamma_L}{\gamma_R + \gamma_L} \cos^3 \theta_J \quad (1.32a)$$

$$\text{曲線 II} \cdots \cdots p_J/p^{E_L} = (1-\alpha_J)\gamma_R \cos^3 \theta_J \quad (1.32b)$$

$$\text{曲線 III} \cdots \cdots p_J/p^{E_L} = (1+\alpha_J)\gamma_L \cos^3 \theta_J \quad (1.32c)$$

曲線Iは、式(1.30)より $\det[K]$ の正負を分ける曲線である。この曲線上では $\det[K]$ は0であり、このときの解は前述の性質を有している。 $(\gamma_R + \gamma_L)$ の正負も $\det[K]$ の正負に関係しているので注意を要する。図-1.4に、 γ_R および γ_L を次の値として、

$$\gamma_L = 1.0, 0.2, 0.0, -0.2$$

$$\gamma_R = 2.0, 1.0, 0.2, 0.0, -0.2$$

これらを組み合わせた場合の曲線Iを示す。 $\gamma_R + \gamma_L = 0$ となる組み合わせ以外はすべ

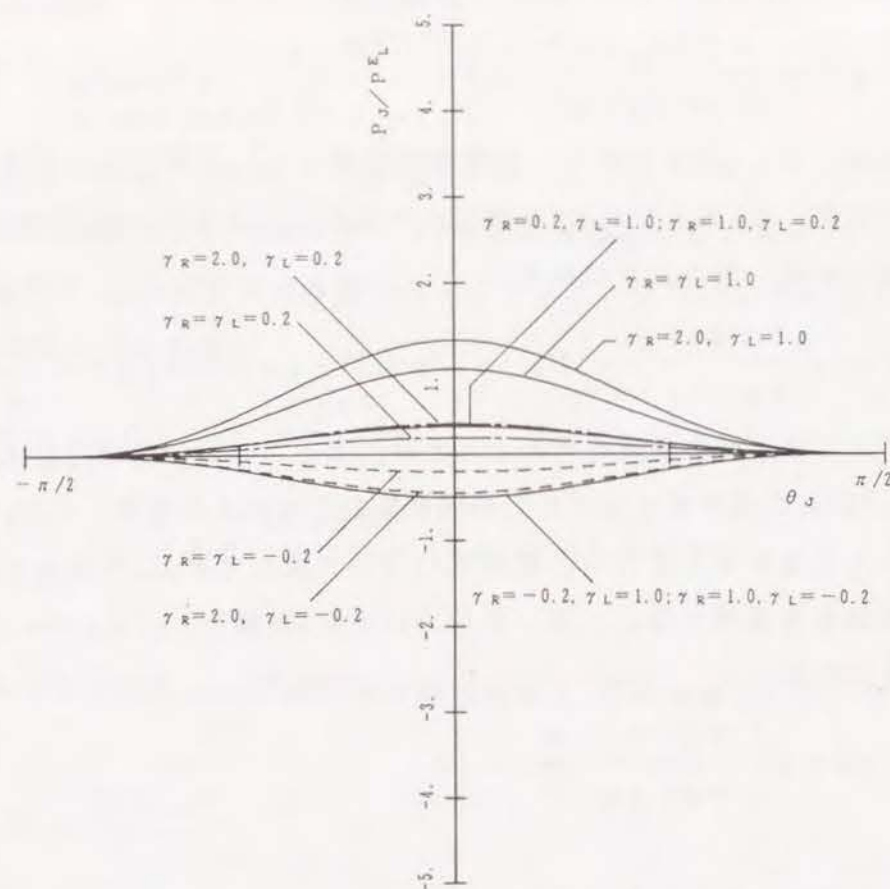
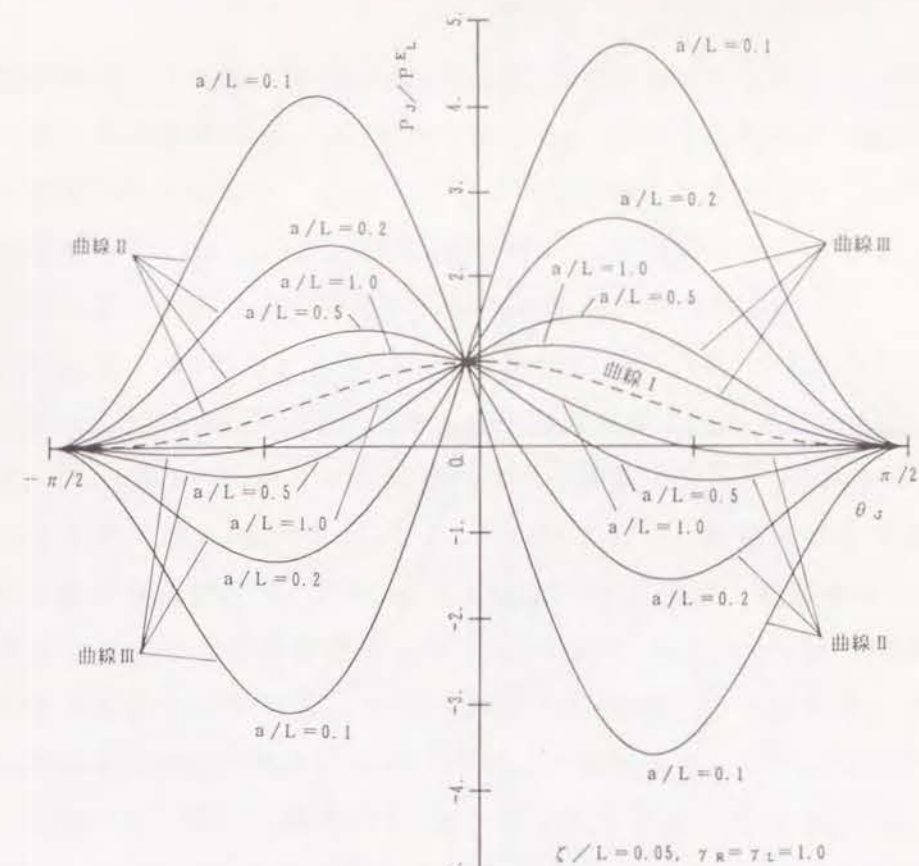


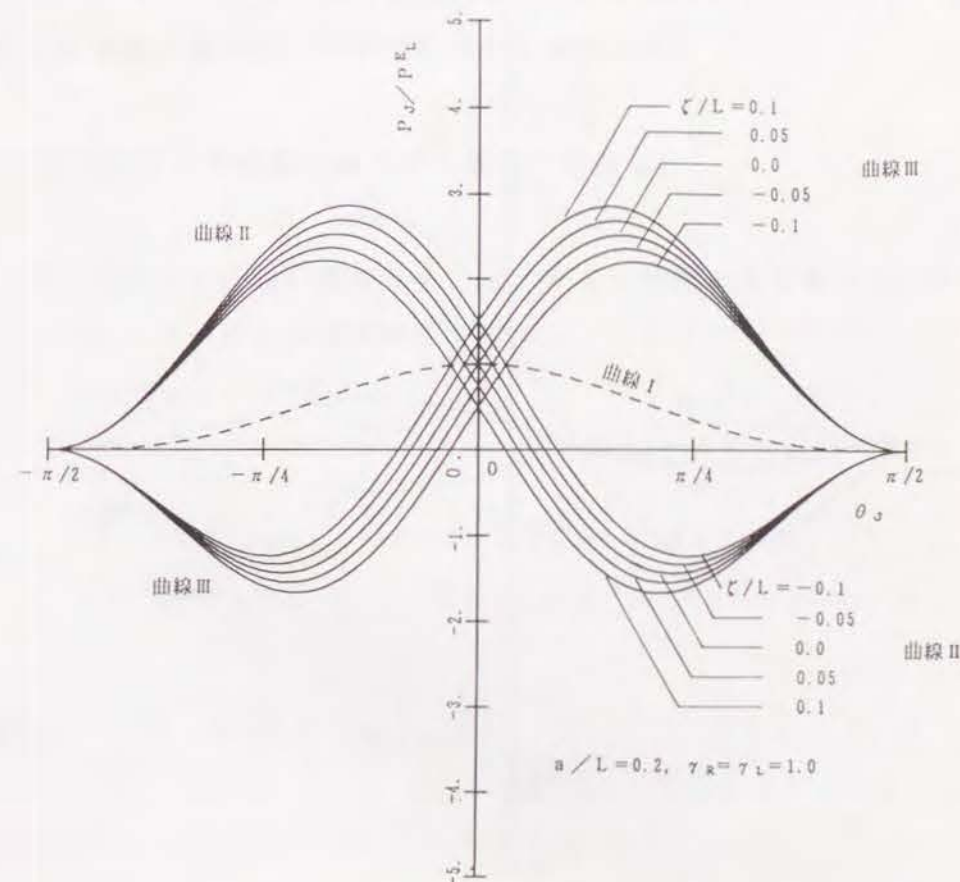
図-1.4 曲線 I の様相

て描かれている。どちらか片方の γ が 0.0 であれば曲線 I は θ_J 軸となる。 $\gamma_R = \gamma_L = -0.2$ を除いて、 $\dot{p} > 0$ の場合、 $\gamma_R + \gamma_L > 0$ のとき P_J / P_{E_L} が曲線 I より下の領域では $\det[K]$ は正、上の領域では $\det[K]$ は負である。 $\gamma_R = \gamma_L = -0.2$ のように $\gamma_R + \gamma_L < 0$ の場合は曲線より下の領域では $\det[K]$ は負、上の領域では $\det[K]$ は正となる。

曲線 II および曲線 III の式は、 θ_J の関数である α_J を含んでいる。式 (1.22) より α_J は系の幾何形状パラメータ a/L と荷重偏心パラメータ ζ/L に影響を受けることがわかる。曲線 II および曲線 III について、 a/L および ζ/L をパラメータとしたときの曲線を図-1.5 に示す。なお、 $\gamma_R = \gamma_L = 1.0$ としてある。図-1.5(a) は、 $\zeta/L = 0.05$ として a/L を 0.1, 0.2, 0.5, 1.0 とした場合の曲線 II と曲線 III を示している。破線は $\gamma_R = \gamma_L = 1.0$ の曲線 I である。曲線 II と曲線 III は曲線 I 上で交わる。この交点の θ_J 座標は式 (1.31) を満たし、この点は分岐点である。 a/L が大きくなる程、すなわち細長比相当のパラメータが小さくなる程、曲線 II および曲線 III と曲線 I に近づいている。 $\gamma_L + \gamma_R > 0$ の場合、式 (1.28) のばねの縮み速度の表現から、曲線 I より下の領域で、かつ曲線 II ならびに曲線 III より下の領域では、 $\dot{p} > 0$ では、左右のばねの

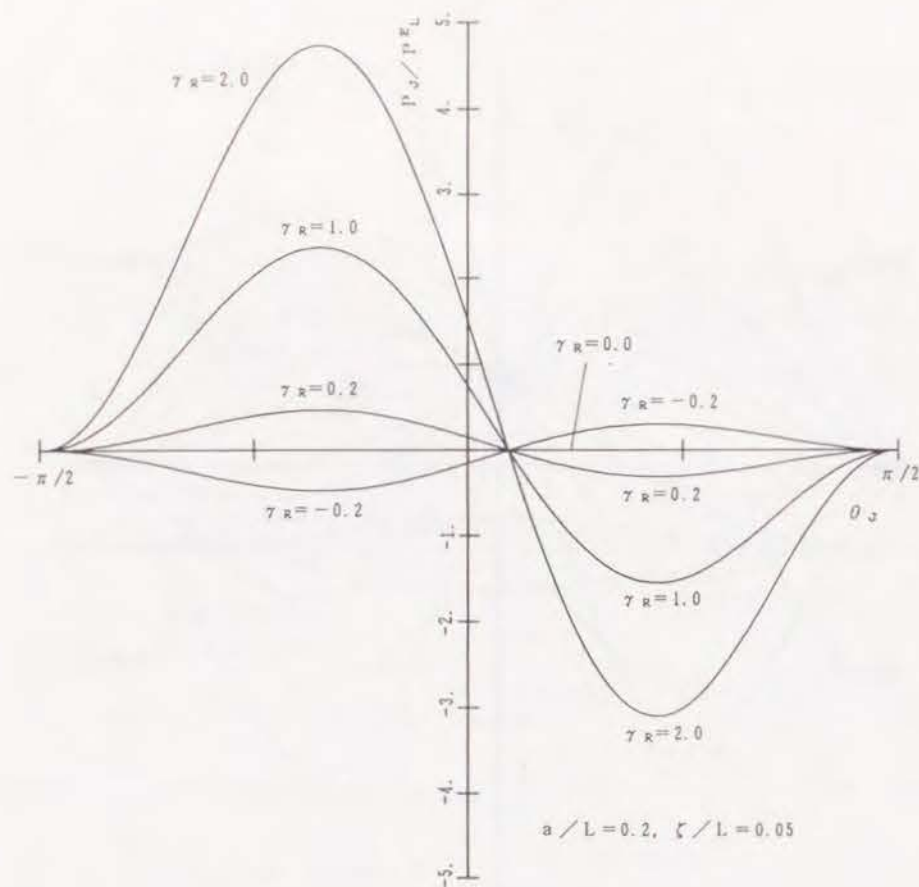


(a) a/L をパラメータとした場合

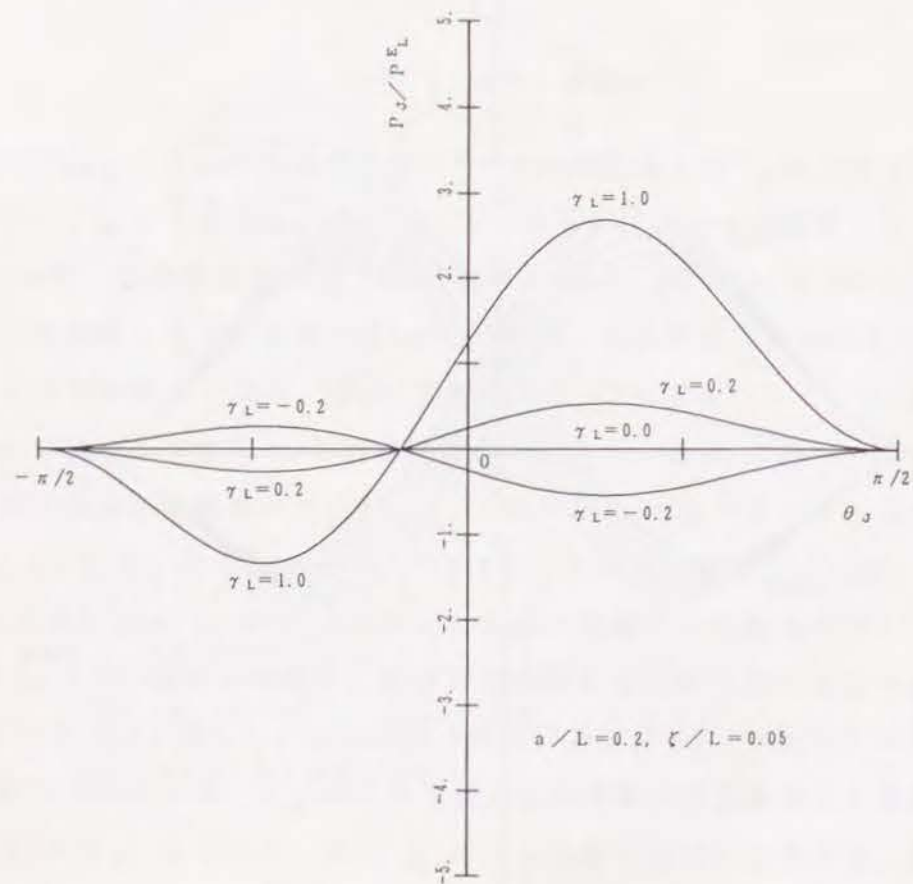


(b) ζ/L をパラメータとした場合

図-1.5 曲線 II および曲線 III の様相 (a/L , ζ/L をパラメータとした場合)



(a) 曲線 II



(b) 曲線 III

図-1.6 曲線 II および曲線 III の様相 ($\gamma_{L,R}$ をパラメータとした場合)

縮み速度は共に正である。その領域と曲線 I の間の領域では、片方が正、もう一方が負という組み合わせになる。 a/L が小さいと、左右のばね両方の縮み速度が正である領域は極めて小さくなり、曲線 I 以下の領域は殆どが片方が正、もう一方が負の組み合わせになっている。一方、 a/L が大きい、細長比の小さいモデルでは、ばねの縮み速度が左右とも正である領域がかなりあることがわかる。

図-1.5(b) は、 $a/L = 0.2$ として $z/L = 0.0, \pm 0.05, \pm 0.1$ とした場合の曲線 II と曲線 III を示している。破線は $\gamma_R = \gamma_L = 1.0$ の曲線 I である。 z/L が正から負に移るにつれ、同一偏心の曲線 II と曲線 III の交点は曲線 I 上を θ_J の負から正へ移る。

系のパラメータを $a/L = 0.2, z/L = 0.05$ として、曲線 II および曲線 III のばね剛性比による曲線の様相を図-1.6(a), (b) に示す。通常、塑性剛性係数 E^t が弾性剛性係数 E より小さいことを考慮すれば、 $\gamma_L = 0.2, 0.0, -0.2$ は、塑性係数の弾性係数に対する比を表わしている。一方、 γ_R については、正であれば、弾性の剛性係数を表わしている可能性があり、また、右ばねの弾性係数より小さければ、塑性係数を表わしていると言える。曲線 II と θ_J 軸とが交わる点は、式(1.9a), (1.22) および式(1.28a) より、左のばね力が圧縮であるか否かの境界点であることがわかる。この点より右の領域であれば、左のばね力は圧縮である。同様に、曲線 III と θ_J 軸とが交わる点より左の領域であれば、右のばね力は圧縮である。

1.3.2 鉛直変位 u を制御変数とする場合 (解法 u)

一般化変位速度 \dot{u} に任意の値を与え、 \dot{p} , $\dot{\theta}$ を未知量として解く場合を考える。式(1.13), (1.14) より、次の連立方程式を得る。

$$[K_u] \{\dot{S}_u\} = \dot{u} \{K_{11}\} \quad (1.33)$$

ここに、

$$[K_u] = \begin{bmatrix} 1 & -(C_R - C_L) a \cos \theta_J \\ L \tan \theta_J + \zeta & -(C_R + C_L) a^2 \cos \theta_J + p_J L \sec^2 \theta_J \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

$$\{\dot{S}_u\} = \begin{Bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}, \quad \{K_{11}\} = \begin{Bmatrix} C_R + C_L \\ (C_R - C_L) a \end{Bmatrix} \quad (1.35, 36)$$

である。このとき、 $\det[K_u]$ は、

$$\begin{aligned}\det[K_u] &= [-(1-\alpha_J)C_R + (1+\alpha_J)C_L] \frac{a^2}{L} \cos^3 \theta_J + p_J] L \sec^2 \theta_J \\ &= [-\frac{1}{2} \{(1-\alpha_J)\gamma_R + (1+\alpha_J)\gamma_L\} \cos^3 \theta_J + p_J/p^{E_L}] p^{E_L} L \sec^2 \theta_J\end{aligned}\quad (1.37)$$

となる。 $\det[K_u]$ の正負は、 $p_J/p^{E_L}-\theta_J$ 平面の次の曲線を境界として判定される。

$$\text{曲線 } I_u \cdots \cdots p_J/p^{E_L} = \frac{1}{2} \{(1-\alpha_J)\gamma_R + (1+\alpha_J)\gamma_L\} \cos^3 \theta_J \quad (1.38)$$

この曲線は、曲線IIと曲線IIIとの p_J/p^{E_L} 座標を0.5倍し加え合わせるによって描ける。曲線 I_u より上の領域では、 $\det[K_u]$ は正、下の領域では負となる。

$\det[K_u] \neq 0$ であれば、式(1.33)の方程式より \dot{p} 、 $\dot{\theta}$ は一意に定まり、

$$\begin{aligned}\dot{p} &= \frac{\dot{u}}{\det[K_u]} \{-4C_R C_L \frac{a^2}{L} \cos^3 \theta_J + (C_R + C_L)p_J\} L \sec^2 \theta_J \\ &= \frac{\dot{u}}{\det[K_u]} \{-\frac{2\gamma_R \gamma_L}{\gamma_R + \gamma_L} \cos^3 \theta_J + p_J/p^{E_L}\} (\gamma_R + \gamma_L) E_L p^{E_L} L \sec^2 \theta_J\end{aligned}\quad (1.39)$$

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \frac{\dot{u}}{\det[K_u]} \{(1-\alpha_J)C_R - (1+\alpha_J)C_L\} a \\ &= \frac{\dot{u}}{\det[K_u]} \frac{1}{2} \{(1-\alpha_J)\gamma_R - (1+\alpha_J)\gamma_L\} \frac{L}{a} p^{E_L}\end{aligned}\quad (1.40)$$

となる。また、ばねの縮み速度 $\dot{e}_{L,R}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned}\dot{e}_L &= \frac{\dot{u}}{\det[K_u]} \{-(1-\alpha_J) \frac{2C_R a^2}{L} \cos^3 \theta_J + p_J\} L \sec^2 \theta_J \\ &= \frac{\dot{u}}{\det[K_u]} \{-(1-\alpha_J)\gamma_R \cos^3 \theta_J + p_J/p^{E_L}\} p^{E_L} L \sec^2 \theta_J\end{aligned}\quad (1.41a)$$

$$\begin{aligned}\dot{e}_R &= \frac{\dot{u}}{\det[K_u]} \{-(1+\alpha_J) \frac{2C_L a^2}{L} \cos^3 \theta_J + p_J\} L \sec^2 \theta_J \\ &= \frac{\dot{u}}{\det[K_u]} \{-(1+\alpha_J)\gamma_L \cos^3 \theta_J + p_J/p^{E_L}\} p^{E_L} L \sec^2 \theta_J\end{aligned}\quad (1.41b)$$

$p_J/p^{E_L}-\theta_J$ 平面における $\dot{e}_{L,R}$ の正負の組み合わせに関する領域分けは、1.3.1項同様、曲線 I_u 、曲線IIおよび曲線IIIによってなされる。

1.3.3 回転角 θ を制御変数とする場合(解法 θ)

一般化変位速度 $\dot{\theta}$ に任意の値を与え、 \dot{p} 、 \dot{u} を未知量として解く場合を考える。式(1.13)、(1.14)より、次の連立方程式を得る。

$$[K_\theta] \{\dot{S}_\theta\} = \dot{\theta} \{K_{21}\} \quad (1.42)$$

ここに、

$$[K_\theta] = \begin{bmatrix} 1 & -(C_R + C_L) \\ L \tan \theta_J + \zeta & -(C_R - C_L)a \end{bmatrix} \quad (1.43)$$

$$\{\dot{S}_\theta\} = \begin{Bmatrix} \dot{p} \\ \dot{u} \end{Bmatrix}, \quad \{K_{21}\} = \begin{Bmatrix} (C_R - C_L)a \cos \theta_J \\ (C_R + C_L)a^2 \cos \theta_J - p_J L \sec^2 \theta_J \end{Bmatrix} \quad (1.44, 45)$$

である。このときの $\det[K_\theta]$ は、

$$\begin{aligned}\det[K_\theta] &= \{-(1-\alpha_J)C_R + (1+\alpha_J)C_L\} a \\ &= \frac{1}{2} \{-(1-\alpha_J)\gamma_R + (1+\alpha_J)\gamma_L\} \frac{L}{a} p^{E_L}\end{aligned}\quad (1.46)$$

となる。 $p_J/p^{E_L}-\theta_J$ 平面において、 $\det[K_\theta]$ の正負の境界すなわち $\det[K_\theta] = 0$ となるのは、式(1.46)と曲線IIおよび曲線IIIを表わす式(1.32b, c)より、曲線IIと曲線IIIの交点の θ_J を通る p_J/p^{E_L} 軸に平行な直線である。 $\gamma_R + \gamma_L > 0$ のとき、この直線より右側の領域では $\det[K_\theta]$ は正、左側の領域では負である。この直線上は式(1.31)を満たしている。

$\det[K_\theta] \neq 0$ のとき、式(1.42)の方程式より \dot{p} 、 \dot{u} は一意に定まり、

$$\begin{aligned}\dot{p} &= \frac{\dot{\theta}}{\det[K_\theta]} \{4C_R C_L \frac{a^2}{L} \cos^3 \theta_J - (C_R + C_L)p_J\} L \sec^2 \theta_J \\ &= \frac{\dot{\theta}}{\det[K_\theta]} \{ \frac{2\gamma_R \gamma_L}{\gamma_R + \gamma_L} \cos^3 \theta_J - p_J/p^{E_L} \} (\gamma_R + \gamma_L) E_L p^{E_L} L \sec^2 \theta_J\end{aligned}\quad (1.47)$$

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \frac{\dot{\theta}}{\det[K_\theta]} [\{(1-\alpha_J)C_R + (1+\alpha_J)C_L\} \frac{a^2}{L} \cos^3 \theta_J - p_J] L \sec^2 \theta_J \\ &= \frac{\dot{\theta}}{\det[K_\theta]} [\frac{1}{2} \{(1-\alpha_J)\gamma_R + (1+\alpha_J)\gamma_L\} \cos^3 \theta_J - p_J/p^{E_L}] p^{E_L} L \sec^2 \theta_J\end{aligned}\quad (1.48)$$

である。また、ばねの縮み速度 $\dot{e}_{L,R}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned}\dot{e}_L &= \frac{\dot{\theta}}{\det[K_\theta]} \left\{ (1 - \alpha_J) \frac{2C_R a^2}{L} \cos^3 \theta_J - p_J \right\} L \sec^2 \theta_J \\ &= \frac{\dot{\theta}}{\det[K_\theta]} \left\{ (1 - \alpha_J) \gamma_R \cos^3 \theta_J - p_J / p^{E_L} \right\} p^{E_L} L \sec^2 \theta_J\end{aligned}\quad (1.49a)$$

$$\begin{aligned}\dot{e}_R &= \frac{\dot{\theta}}{\det[K_\theta]} \left\{ (1 + \alpha_J) \frac{2C_L a^2}{L} \cos^3 \theta_J - p_J \right\} L \sec^2 \theta_J \\ &= \frac{\dot{\theta}}{\det[K_\theta]} \left\{ (1 + \alpha_J) \gamma_L \cos^3 \theta_J - p_J / p^{E_L} \right\} p^{E_L} L \sec^2 \theta_J\end{aligned}\quad (1.49b)$$

$p_J / p^{E_L} - \theta_J$ 平面における $\dot{e}_{L,R}$ の正負の組み合わせに関する領域分けは、 $\det[K_\theta]$ の正負の境界を表わす上述の直線と曲線Ⅱおよび曲線Ⅲによってなされる。

解法 p, 解法 u および解法 θ における係数行列の行列式値を同時に 0 とするのは、 $C_L = C_R = 0$ で $p_J = 0$ のとき、もしくは $C_R = 0$ で $p_J = 0$, $\theta_J = \theta^{(R)}$ のときのみであり、それ以外の場合は、ばねの縮み速度の符号が式(1.7)の構成則と整合しているか否かはともかくとして、いずれかの解法で求まる。また、ばねの縮み速度の符号は、ばねの剛性係数に関わらず、各解法の係数行列の行列式値の正負を分ける曲線（あるいは直線）Ⅰと曲線Ⅱおよび曲線Ⅲを用いて検討することができる。

1.4 ばねの縮み速度の符号による整合剛性領域図の作成

左右のばねの縮み速度の組み合わせは、次の 4 通りが考えられる：

$$\begin{array}{llll} A. \begin{cases} \dot{e}_L > 0 \\ \dot{e}_R > 0 \end{cases} & B. \begin{cases} \dot{e}_L > 0 \\ \dot{e}_R < 0 \end{cases} & C. \begin{cases} \dot{e}_L < 0 \\ \dot{e}_R > 0 \end{cases} & D. \begin{cases} \dot{e}_L < 0 \\ \dot{e}_R < 0 \end{cases} \end{array}$$

これらの組み合わせを次のように表記する、

$$A(+, +), \quad B(+, -), \quad C(-, +), \quad D(-, -)$$

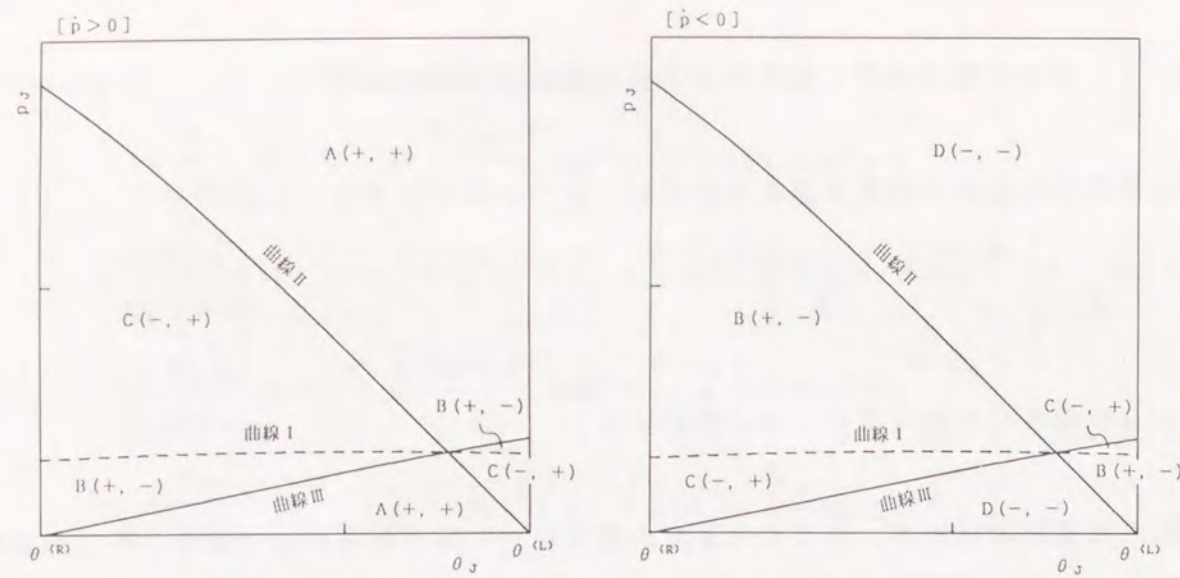
括弧内の最初の符号が、左ばねの速度の符号を、2 番目が右ばねの速度の符号を表わしている。略記する際には、A, B, C, D の記号のみを用いる。左右のばねの縮み速度の組み合わせ A ~ D に関する $p_J / p^{E_L} - \theta_J$ 平面での領域分けは、制御変数速度に正負どちらの値を与えるかと、各解法における係数行列の行列式値に関する曲線あるいは直線Ⅰ、および曲線Ⅱ、Ⅲによってなされることを前節で述べた。解法の違いは、係数行列の行列式値に関する曲線（直線）Ⅰに現われ、曲線ⅡおよびⅢはどの解法によったかには関わらない。剛性係数の組み合わせが変わると、3 曲線の様相は変化する。ただし、曲線（直線）Ⅰが必ず曲線Ⅱと曲線Ⅲの交点を通ること、曲線Ⅱは θ_J 軸と $\theta^{(L)}$ で、曲線Ⅲは $\theta^{(R)}$ で交わることは変わらない。したがって、これら 3 曲線を境界として分けられた領域の一つ一つは剛性係数の組み合わせによって面積は変化するが、制御変数の速度の符号を決めると、各領域での左右のばねの縮み速度の組み合わせは剛性係数の組み合わせに関わらず同じである。例えば、解法 p で $\dot{p} > 0$ とした場合、曲線Ⅰおよび曲線Ⅱ、 $\theta_J = \theta^{(R)}$ 直線で囲まれた領域でのばねの縮み速度の組み合わせは、剛性係数が左右とも正であれば、左右の剛性係数の塑性、弾性の組み合わせに関わらず、必ず C(-, +) である。また、 $\dot{p} < 0$ とすれば、その領域は B(+, -) である。

図-1.7 は、左右の剛性係数がともに正の、ある組み合わせにおける、左右のばねの縮み速度の組み合わせを示している。

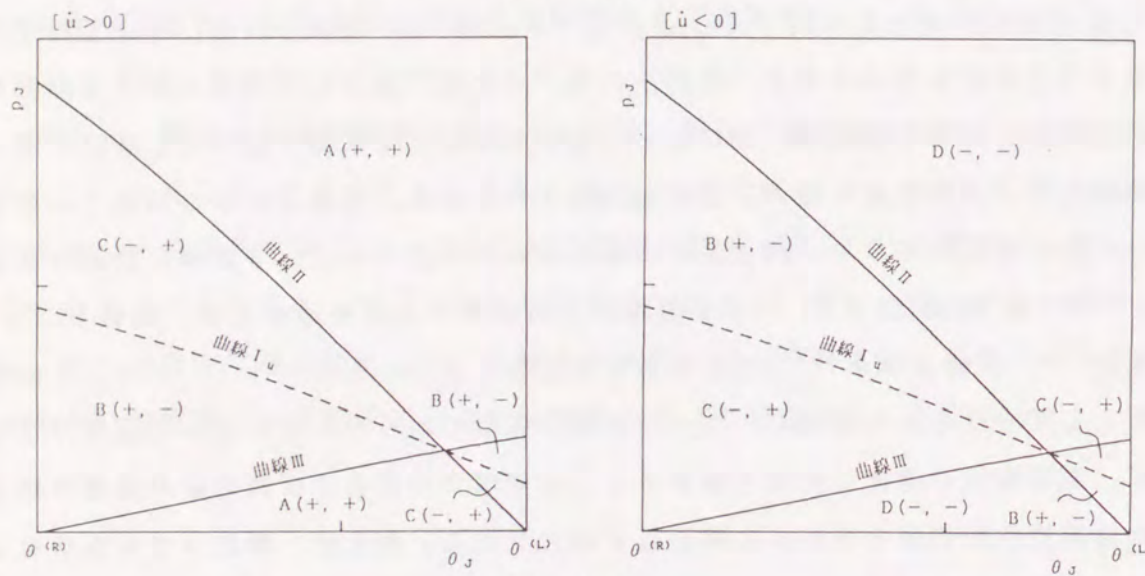
一方、左右のばねの剛性係数の組み合わせは、次の 4 通りが考えられる：

$$\begin{array}{llll} [EE] \begin{cases} C_L = E_L \\ C_R = E_R \end{cases} & [EP] \begin{cases} C_L = E_L \\ C_R = E^{t_R} \end{cases} & [PE] \begin{cases} C_L = E^{t_L} \\ C_R = E_R \end{cases} & [PP] \begin{cases} C_L = E^{t_L} \\ C_R = E^{t_R} \end{cases} \end{array}$$

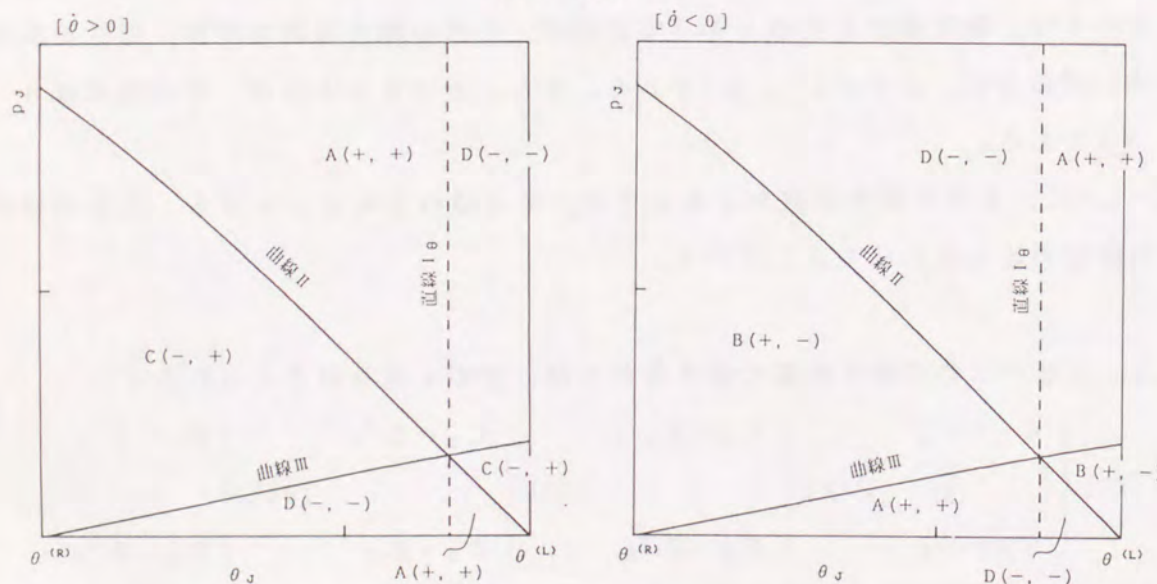
[] 内の最初の記号が、左ばねの剛性係数を、2 番目が右ばねの剛性係数を表わし、



(a) 解法 p



(b) 解法 u



(c) 解法 θ

図-1.7 塑性剛性係数が正である左右のばねの縮み速度の組み合わせ

記号Eは、弾性・除荷剛性係数を、記号Pは塑性剛性係数を表わしている。

現段階（J状態）において左右のばねの状態点が、それぞれ力-縮み関係におけるどの経路にあるかで、選択可能な剛性係数の組み合わせは決まり、次の3つの場合に分類できる：

[S1] 左右のばねの状態点がともに弾性あるいは除荷（塑性経路上にある除荷点は含まない）直線上にある場合、すなわち、

$$e_{L,R} < e^{y1}_{L,R} \text{ で ばね剛性係数の組み合わせは, [EE] の1通り}$$

[S2] 左右のばねの状態点がともに塑性経路上にある場合、すなわち、

$$e_{L,R} = e^{y1}_{L,R}$$

で、ばね剛性係数の組み合わせは、[PP], [PE], [EP], [EE] の4通り

[S3] 片方のばねの状態点が塑性経路上、もう片方のばねの状態点が弾性あるいは除荷（塑性経路上にある除荷点は含まない）直線上にある場合；

i) 右ばねの状態点が塑性経路上にある場合、すなわち、

$$e_R = e^{y1}_R, e_L < e^{y1}_L$$

で ばね剛性係数の組み合わせは、[EP], [EE] の2通り

ii) 左ばねの状態点が塑性経路上にある場合、すなわち、

$$e_L = e^{y1}_L, e_R < e^{y1}_R$$

で、ばね剛性係数の組み合わせは、[PE], [EE] の2通り

ばねの状態点が力-縮み関係における塑性経路上にある場合、そのばねがとり得る縮み速度の符号は、式(1.7)に示されるように、そのばねの剛性係数が塑性剛性係数 E^t なら縮み速度 \dot{e} は正でなければならず、弾性・除荷剛性係数 E をとるなら \dot{e} は負でなければならない。すなわち、

$$E^t \text{ なら } \dot{e} > 0 ; \quad E \text{ なら } \dot{e} < 0$$

である。[S1] の場合は、ばねの縮み速度のとり得る符号に制約はなく、剛性選択の問題が生じないことは明らかである。しかし、[S2], [S3] の場合には、ばねの縮み速度の符号はそれを得るのに仮定された剛性係数との整合性を確かめなければならない。

以下の各図は、幾何形状パラメータ a/L を0.2, 荷重偏心パラメータ ξ/L を0.05として、描かれている。

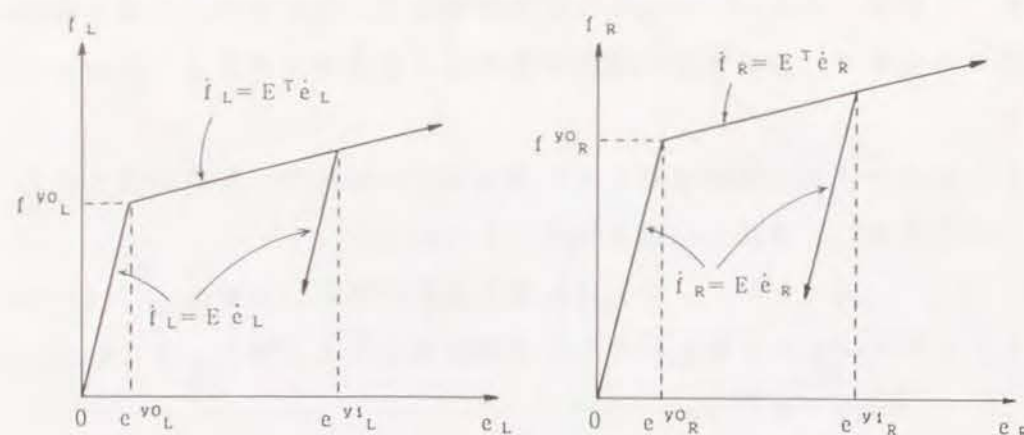


図-1.8 塑性剛性係数が正である左右のばねの力-縮み関係

1.4.1 塑性剛性係数が正の場合

左右のばねが、図-1.8に示すような力-縮み関係を有する系を考える。両ばねとも同じ弾性・除荷剛性係数、塑性剛性係数をもつが、初期降伏力は任意である。

なお、以下、本項の図は塑性剛性係数の弾性・除荷剛性係数に対する比 γ を0.2としている。

1.4.1.1 左右のばねの状態点がともに力-縮み関係における

塑性経路上にある場合 [S 2 正]

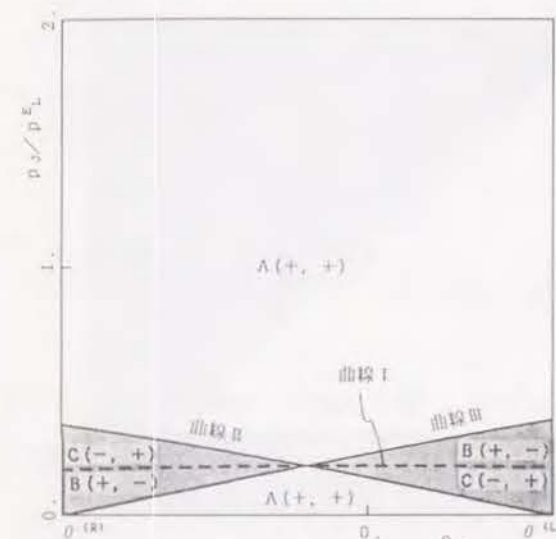
4通りの剛性係数の組み合わせが考えられ、各剛性係数の組み合わせに対して許容されるばねの縮み速度の組み合わせは、次のようになる。

$$\begin{aligned} [\text{PP}] &\text{ --- } A(+, +), & [\text{PE}] &\text{ --- } B(+, -) \\ [\text{EP}] &\text{ --- } C(-, +), & [\text{EE}] &\text{ --- } D(-, -) \end{aligned}$$

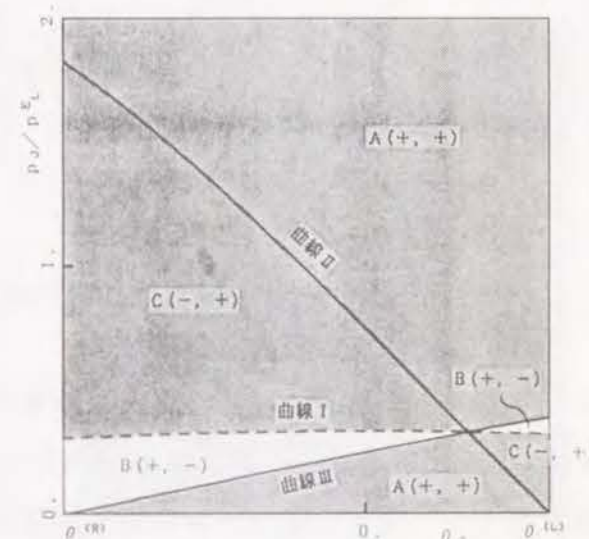
(1) 解法 p による整合剛性領域図： 図-1.9.1は、1.3.1項の解法 p で解いた場合のばねの剛性係数の組み合わせと縮み速度との整合性の判定結果を示している。制御変数 p の速度は正である。左右のばねがとり得る4つの剛性係数の組み合わせ[PP], [EP], [PE]および[EE]それぞれの場合に図(a)~(d)は対応している。実線は曲線IIおよびIIIを、破線は曲線Iを示している。図中には、ばねの縮み速度の組み合わせを

示し、その剛性係数の組み合わせと矛盾する領域には薄網を施してある。それ以外の領域は、左右のばねとも剛性係数と縮み速度とが整合している領域であり、この領域でのみ、その図に対応する剛性係数の組み合わせが許容される。図-1.9.2は、 \dot{p} を負とした場合の整合領域と矛盾領域を示している。 $\dot{p} > 0$ では、図-1.9.1(d)から、[EE]という剛性係数の組み合わせは全領域で認められないことがわかる。一方、図-1.9.2(a)から、 $\dot{p} < 0$ では[PP]という組み合わせは認められない。

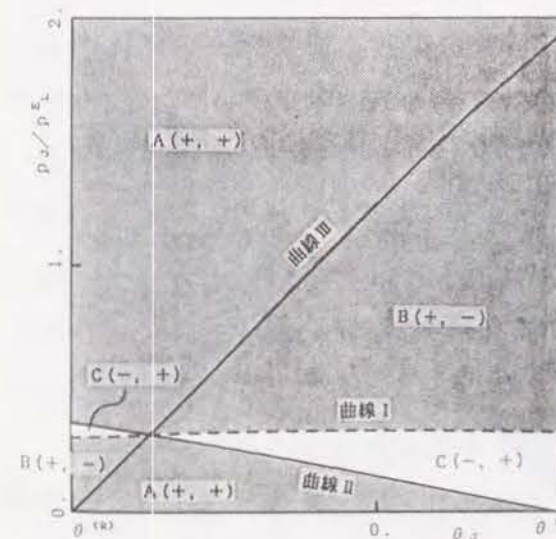
図-1.9.1, 1.9.2の(a)~(d)の4つの図の整合領域をそれぞれ1つの図に重ね合



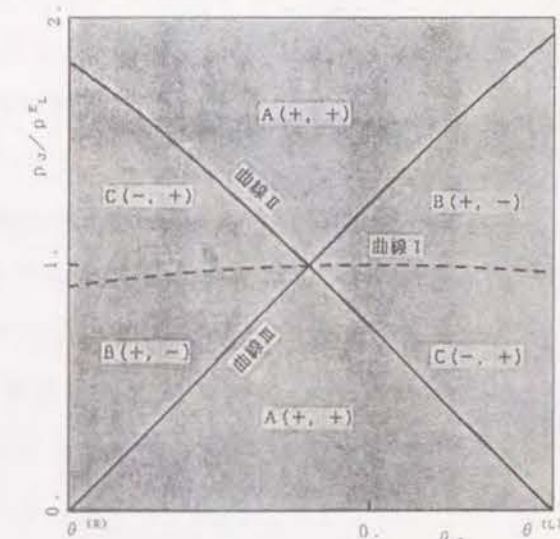
(a) [PP]



(b) [PE]



(c) [EP]



(d) [EE]

図-1.9.1 [S 2 正]で $\dot{p} > 0$ の場合の整合領域と矛盾領域

わせた結果を図-1.9.3(a), (b)に, さらに, その図-1.9.3(a), (b)の整合領域を1つの図に重ね合わせた結果, すなわち, 解法pによる整合剛性領域図を図-1.10に示す。曲線, 直線で区切られた各領域内に整合する剛性係数の組み合わせが記されている。剛性係数の組み合わせを示す[]の上添字+, -はそれぞれ制御変数速度 \dot{p} の正, 負に対応している。図-1.9.4(a)の $\dot{p} > 0$ の場合に, [PP], [EP], [PE]の3つの剛性係数の組み合わせで整合となる領域がある。この領域の上の境界を形成している破線は[EP]および[PE]の剛性係数の組み合わせにおける曲線Iで, $\theta_J = 0$ を

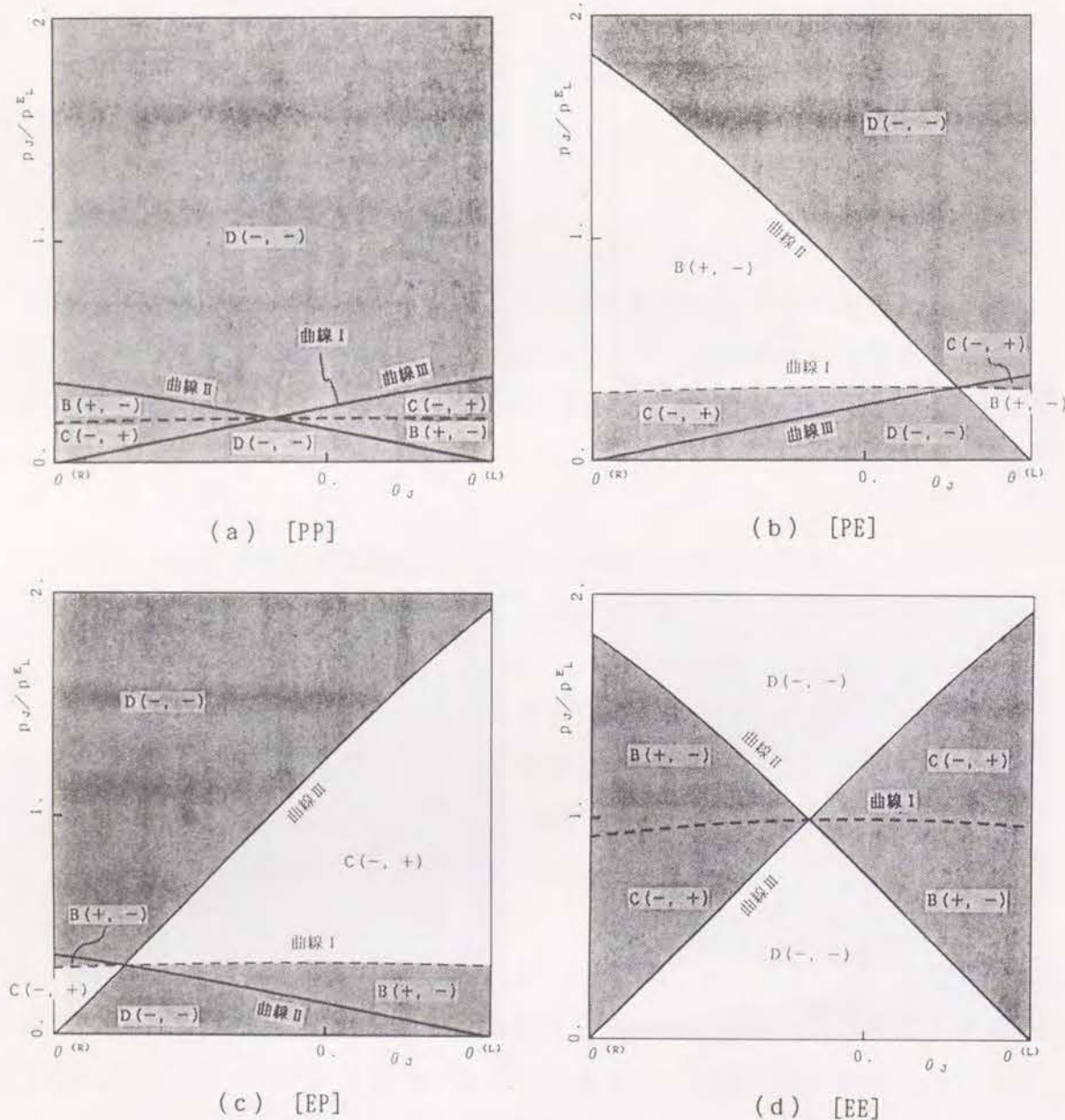


図-1.9.2 [S 2 正]で $\dot{p} < 0$ の場合の整合領域と矛盾領域

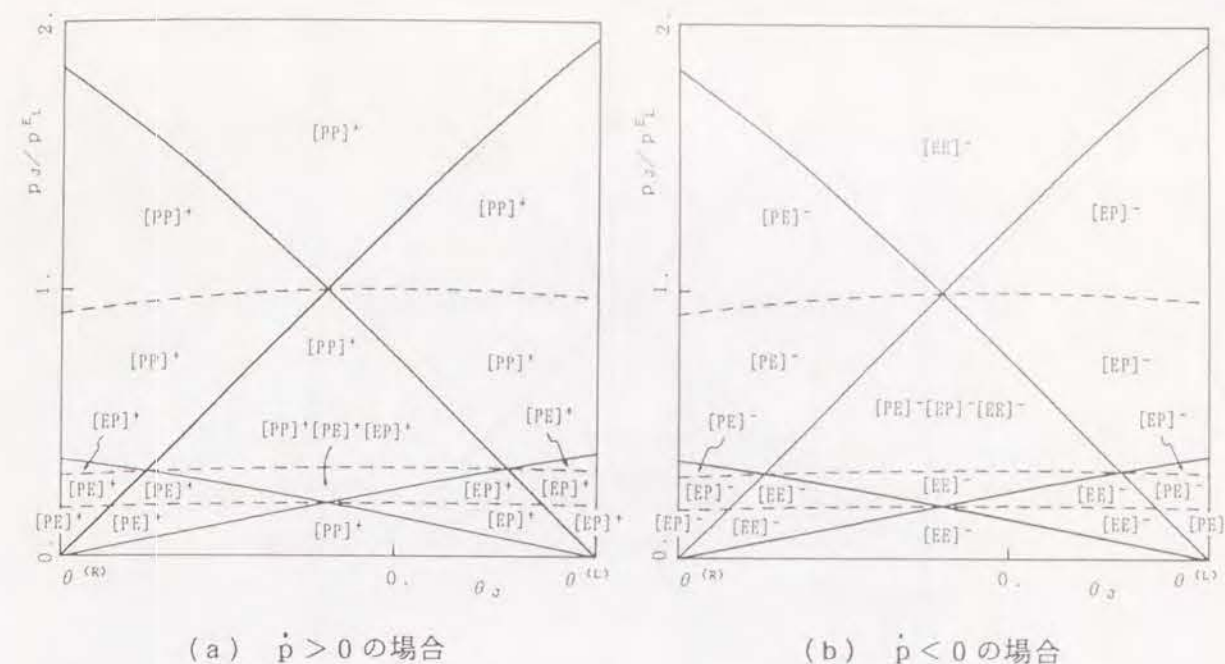


図-1.9.3 [S 2 正]の場合の解法pによる整合剛性領域図

通り p_J/p_{E_L} 軸に平行な直線との交点は換算剛性係数荷重を示す。一方, 下の境界点である曲線の交点を通る破線は剛性係数の組み合わせ[PP]の曲線Iで, $\theta_J = 0$ を通り p_J/p_{E_L} 軸に平行な直線との交点は接線剛性係数荷重を示しており, よく知られた \dot{p} を正とする分岐解の存在を示唆している。また, $\dot{p} < 0$ の場合には, [EP], [PE], [EE]の3つの剛性係数の組み合わせで整合となる領域がある。この領域の上の境界点である曲線の交点を通る破線は剛性係数の組み合わせ[EE]の曲線Iで, $\theta_J = 0$ を通り p_J/p_{E_L} 軸に平行な直線との交点は Euler 荷重を示しており, 下の境界を形成している破線は換算剛性係数荷重を通る曲線である。この領域の存在は弾性座屈荷重と換算剛性係数荷重との間で \dot{p} を負とする分岐が可能であることに対応している。

図-1.9.3(a), (b)から, \dot{p} が正の場合も負の場合も, 全ての領域ではねの縮み速度と整合する剛性係数の組み合わせが存在することが確認できる。さらに, 図-1.10から \dot{p} を正負に広げれば, 全ての領域で複数の剛性係数の組み合わせが可能となる。どの剛性係数の組み合わせを選択するかは, 1.6節に述べるが, どのような釣合経路を得たいかという解析目的に依存している。

(2) 解法uおよび解法 θ による整合剛性領域図: (1)と同様にして, 制御変数を変えた1.3.2項の解法uによる整合剛性領域図を図-1.11に示す。また, 1.3.3項の解

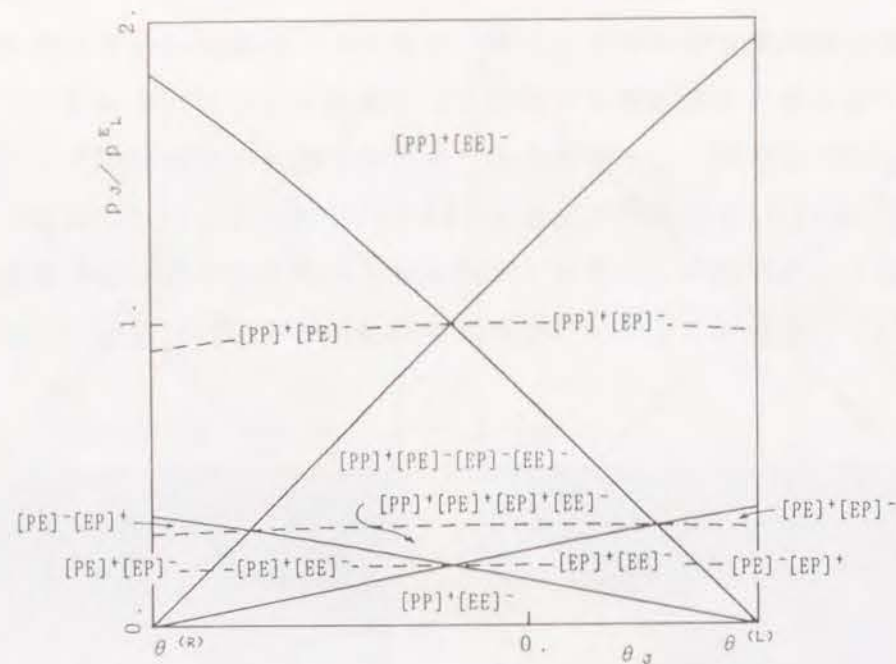


図-1.10 [S 2 正]の場合の解法 p による整合剛性領域図

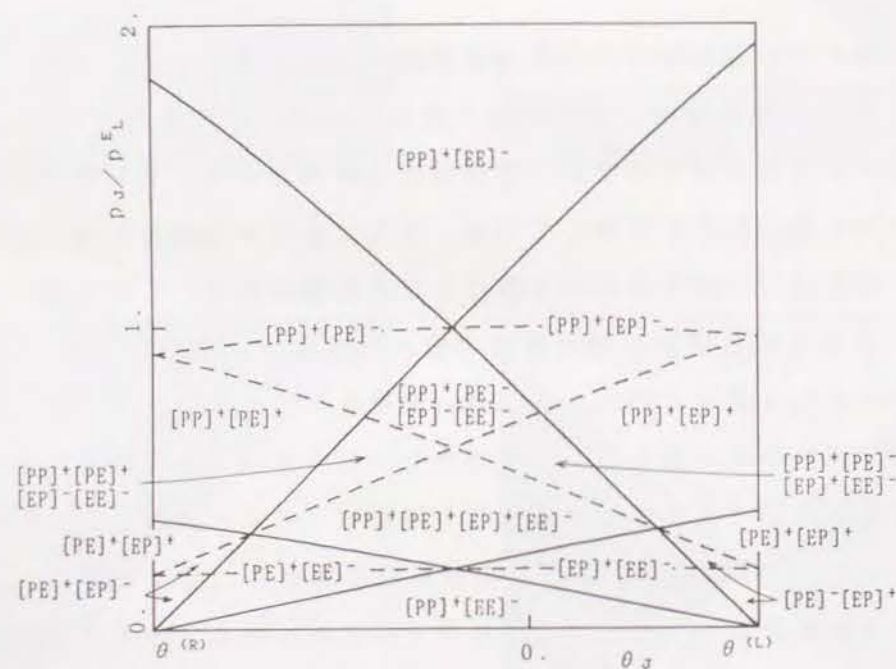


図-1.11 [S 2 正]の場合の解法 u による整合剛性領域図

法 θ による整合剛性領域図を図-1.12に示す。解法 u で $[-]$ の剛性係数の組み合わせのない領域が存在する。これらの領域では、制御変数 u の速度を負とする整合剛性を見つけることはできない。

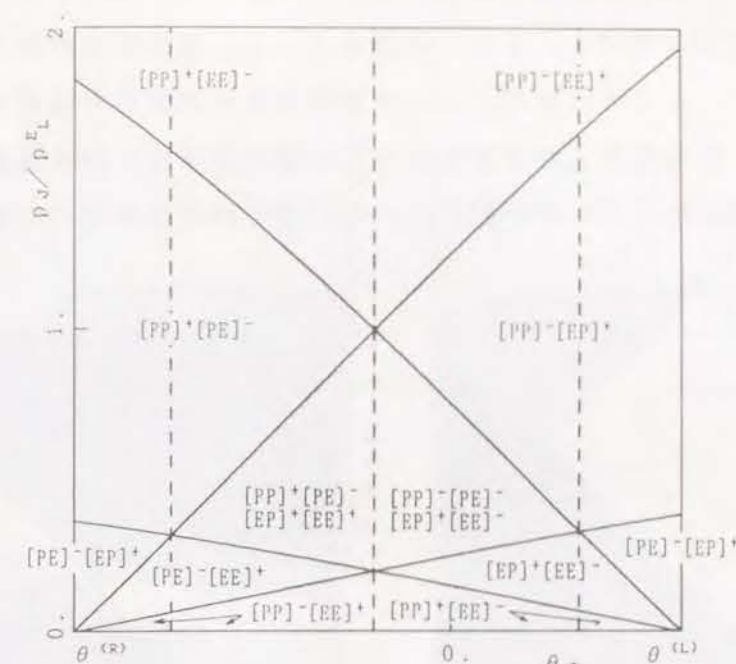


図-1.12 [S 2 正]の場合の解法 θ による整合剛性領域図

制御変数の異なる3つの整合剛性領域図、図-1.10, 1.11および1.12は、剛性係数の組み合わせを示す $[]$ の上添字 $+$, $-$ が互いに異なる領域はあるが、制御変数の速度の正負を考慮せずに整合する剛性係数の組み合わせそのものを見ると、実線で区切られた領域分けとなり、当然ではあるが、3つとも完全に一致する。

1.4.1.2 片方のばねの状態点が力-縮み関係における塑性経路上、

もう片方のばねの状態点が弾性あるいは除荷直線上にある場合 [S 3 正]

左右どちらのばねの状態点が塑性経路上にあるかで、各々2通りの剛性係数の組み合わせが考えらる。各剛性係数の組み合わせに対して許容されるばねの縮み速度は、次のようにそれぞれ2つの組み合わせである。

i) 右ばねの状態点が塑性経路上にある場合

[EP] — A(+, +), C(-, +)

[EE] — B(+, -), D(-, -)

ii) 左ばねの状態点が塑性経路上にある場合

[PE] — A(+, +), B(+, -)

[EE] — C(-, +), D(-, -)

ここでは、i) の右ばねの状態点が塑性経路上にある場合を記すが、ii) の場合も同様の整合剛性領域図が描ける。また、解法によって、整合剛性の組み合わせそのものは変わらないので、ここでは解法 p による整合剛性領域図の作成過程のみ述べる。

図-1.13.1 は、制御変数 p の速度を正とした場合のばねの剛性係数と縮み速度との整合性の判定結果を示している。図(a), (b)はそれぞれ左右のばねがとり得る2つ

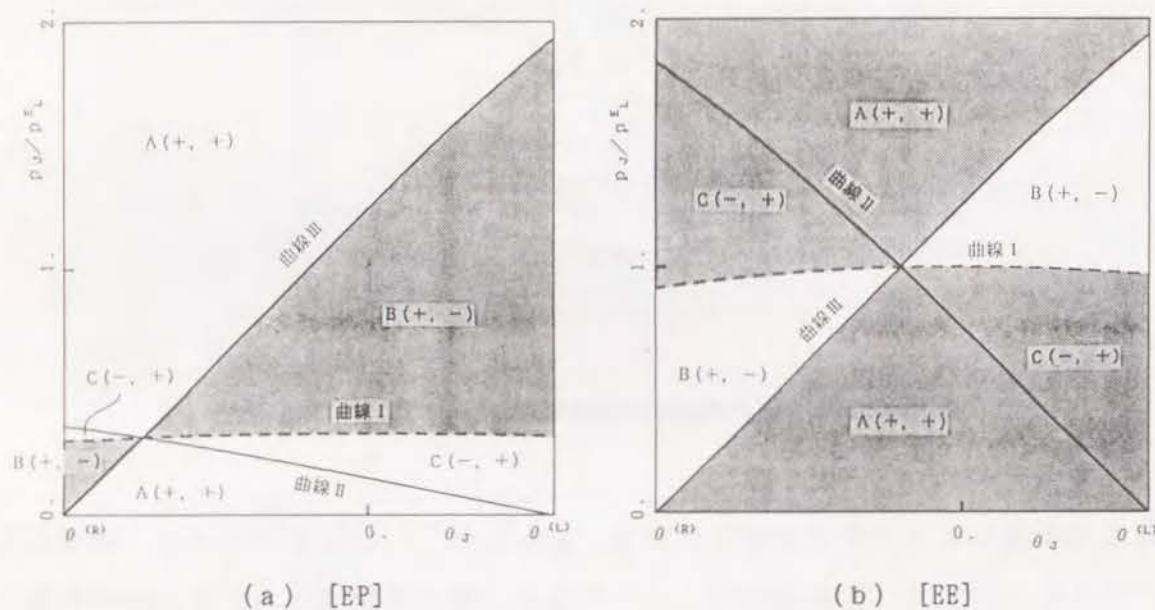


図-1.13.1 [S3正]のi)で $\dot{p} > 0$ の場合の整合領域と矛盾領域

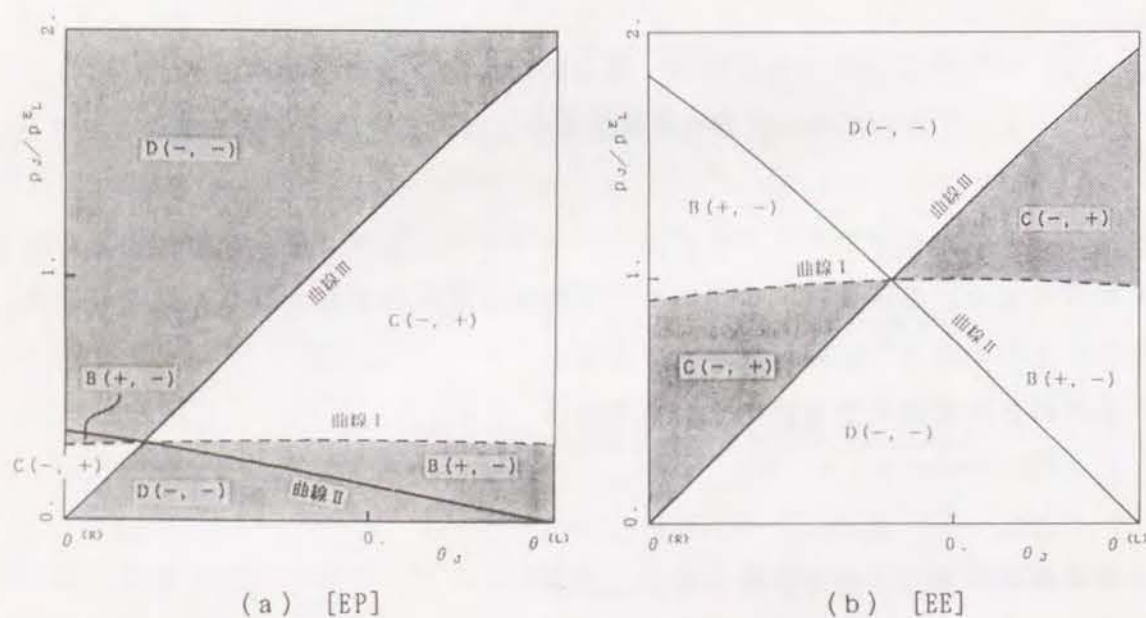


図-1.13.2 [S3正]のi)で $\dot{p} < 0$ の場合の整合領域と矛盾領域

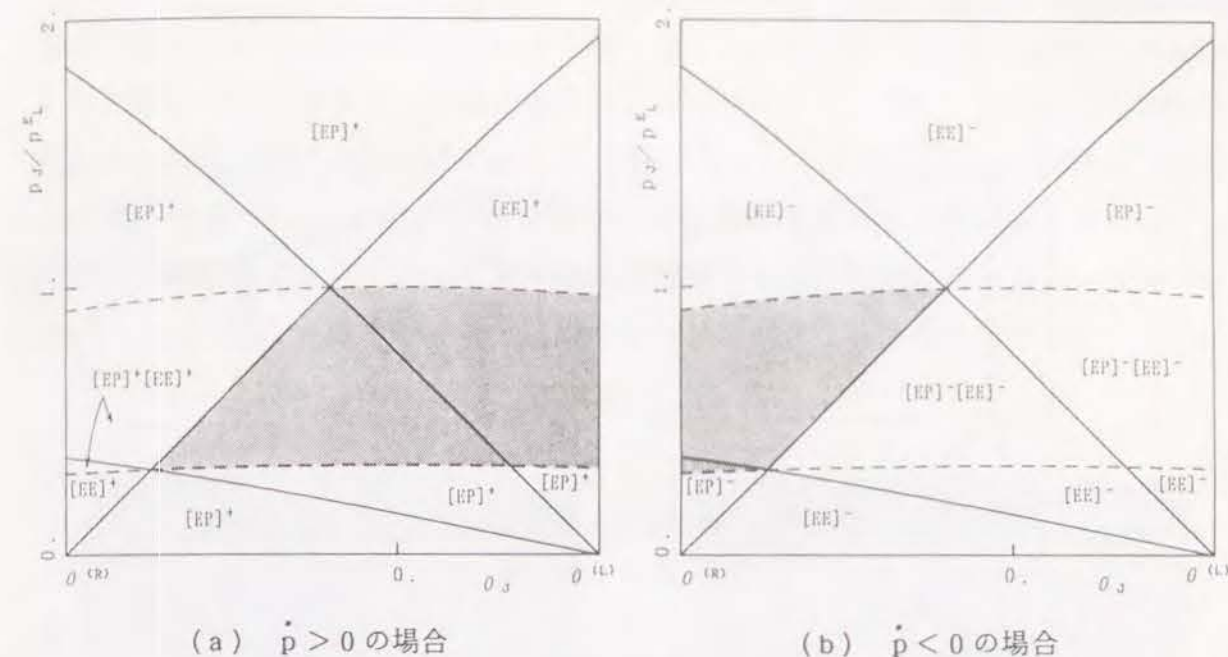


図-1.13.3 [S3正]のi)の場合の解法 p による整合剛性領域図

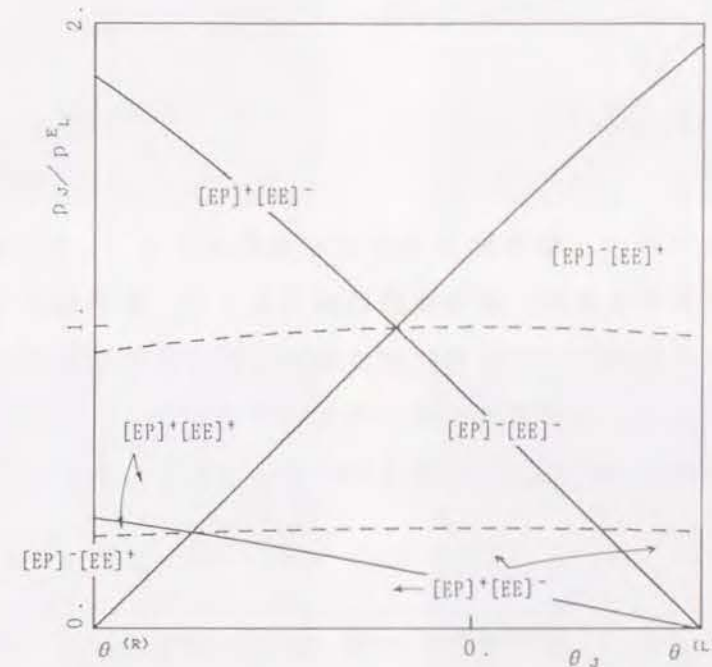


図-1.14 [S3正]のi)の場合の解法 p による整合剛性領域図

の剛性係数の組み合わせ[EP]および[EE]に対応している。図-1.13.2は、 \dot{p} を負とした場合の整合領域と矛盾領域を示している。 \dot{p} の正負それぞれの整合領域を1つの図に重ね合わせ、整合剛性の組み合わせを記した結果を図-1.13.3(a), (b)に、さらに、それらの整合領域を1つの図に重ね合わせた結果を図-1.14に示す。図-1.13.3

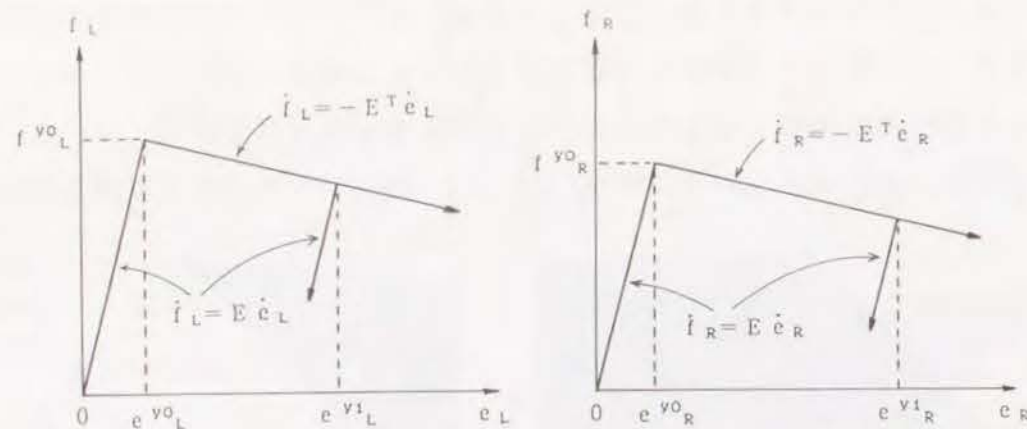


図-1.15 塑性剛性係数が負である左右のばねの力-縮み関係

(a), (b)から, \dot{p} を正, あるいは \dot{p} を負と限定した場合には, 整合剛性の見つからない領域が残る。しかし, 図-1.14より \dot{p} の正負を考えれば, 全領域で[EP], [EE]の2つの剛性係数の組み合わせが可能である。

1.4.2 塑性剛性係数が負の場合

図-1.15に示すような力-縮み関係を有する系を考える。1.4.1項同様, 左右のばねとも同じ弾性・除荷剛性係数, 塑性剛性係数であるが, 初期降伏力は任意である。

左右のばねの剛性係数の組み合わせに塑性剛性係数を含む場合には, 領域分けを行なう3つの曲線が考えている領域内に現われない場合がある。

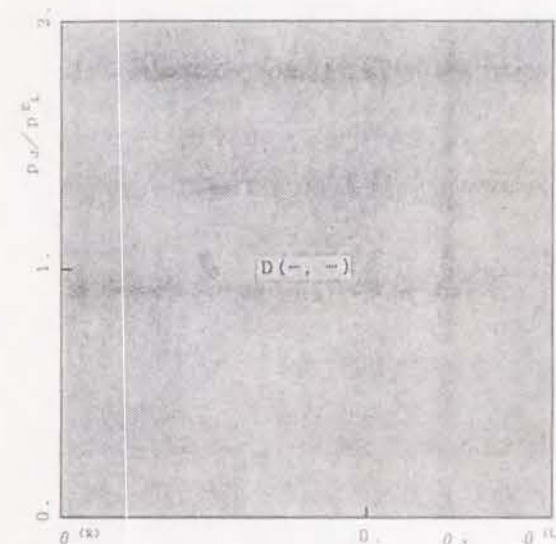
なお, 以下, 本項の図は塑性剛性係数の弾性・除荷剛性係数に対する比 γ を-0.2としている。

1.4.2.1 左右のばねの状態点がともに力-縮み関係における

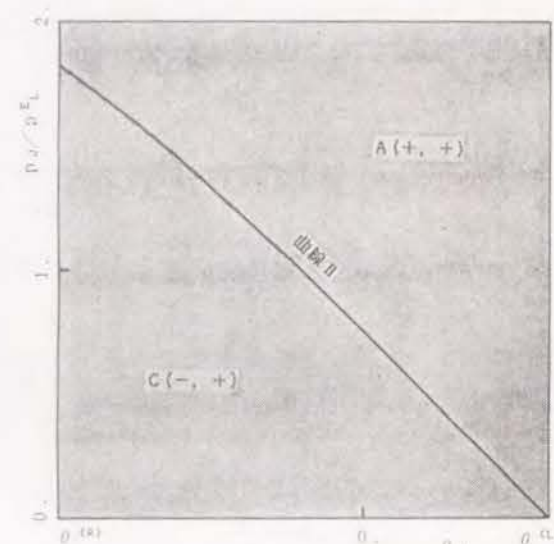
塑性経路上にある場合 [S 2 負]

考えられる剛性係数の組み合わせ, および各剛性係数の組み合わせに対して許容されるばねの縮み速度の組み合わせは, 1.3.1.1の塑性剛性係数が正の場合と同じである。

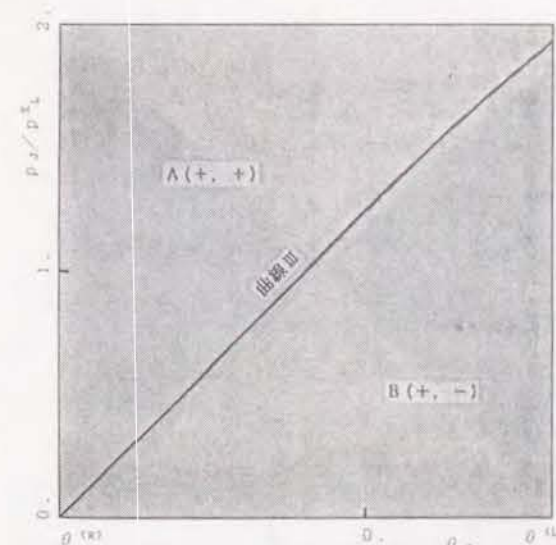
(1) 解法 p による整合剛性領域図: 図-1.16.1は, 制御変数 p の速度を正とした場合のばねの剛性係数の組み合わせと縮み速度との整合性の判定結果を示している。左右のばねがとり得る4つの剛性係数の組み合わせ[PP], [EP], [PE]および[EE]それぞれの場合に図(a)~(d)は対応している。[EE]の場合の図(d)は, 塑性剛性係数が正の場合の図-1.9.1(d)と同じである。どの剛性係数の組み合わせを採っても, 全領域が矛盾領域であり, ばねの縮み速度と整合する剛性係数の組み合わせは得られない。したがって, 解析実行時に左右のばねの状態点がともに力-縮み関係における塑



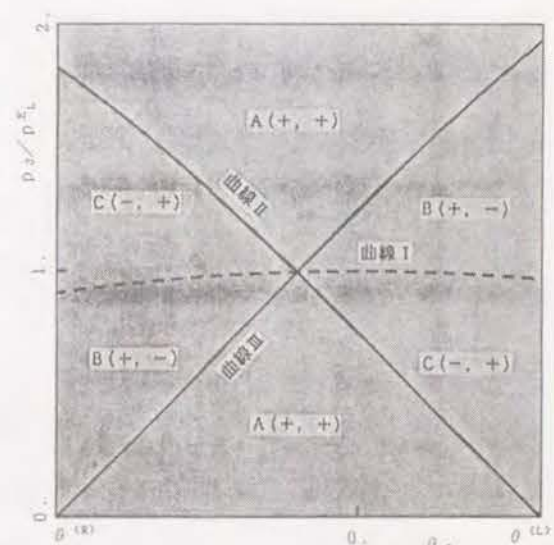
(a) [PP]



(b) [PE]



(c) [EP]



(d) [EE]

図-1.16.1 [S 2 負]で $\dot{p} > 0$ の場合の整合領域と矛盾領域

性経路上にのる状態に至った場合には、解法 p で $\dot{p} > 0$ とする解は得られないことになる。一方、図-1.16.₂は、 \dot{p} を負とした場合のばねの剛性係数の組み合わせと縮み速度との整合性の判定結果を示している。なお、[EE]に関する図(d)は、図-1.9.₂(d)と同じである。この場合は、各剛性係数の組み合わせに対し整合領域が存在し、[PP]の組み合わせでは全領域で縮み速度は整合することがわかる。

図-1.16.₂の(a)~(d)の4つの図の整合領域を1つの図に重ね合わせた結果を図-1.17に示す。この図は、塑性剛性係数が負で左右のばねの状態点とともに塑性経路

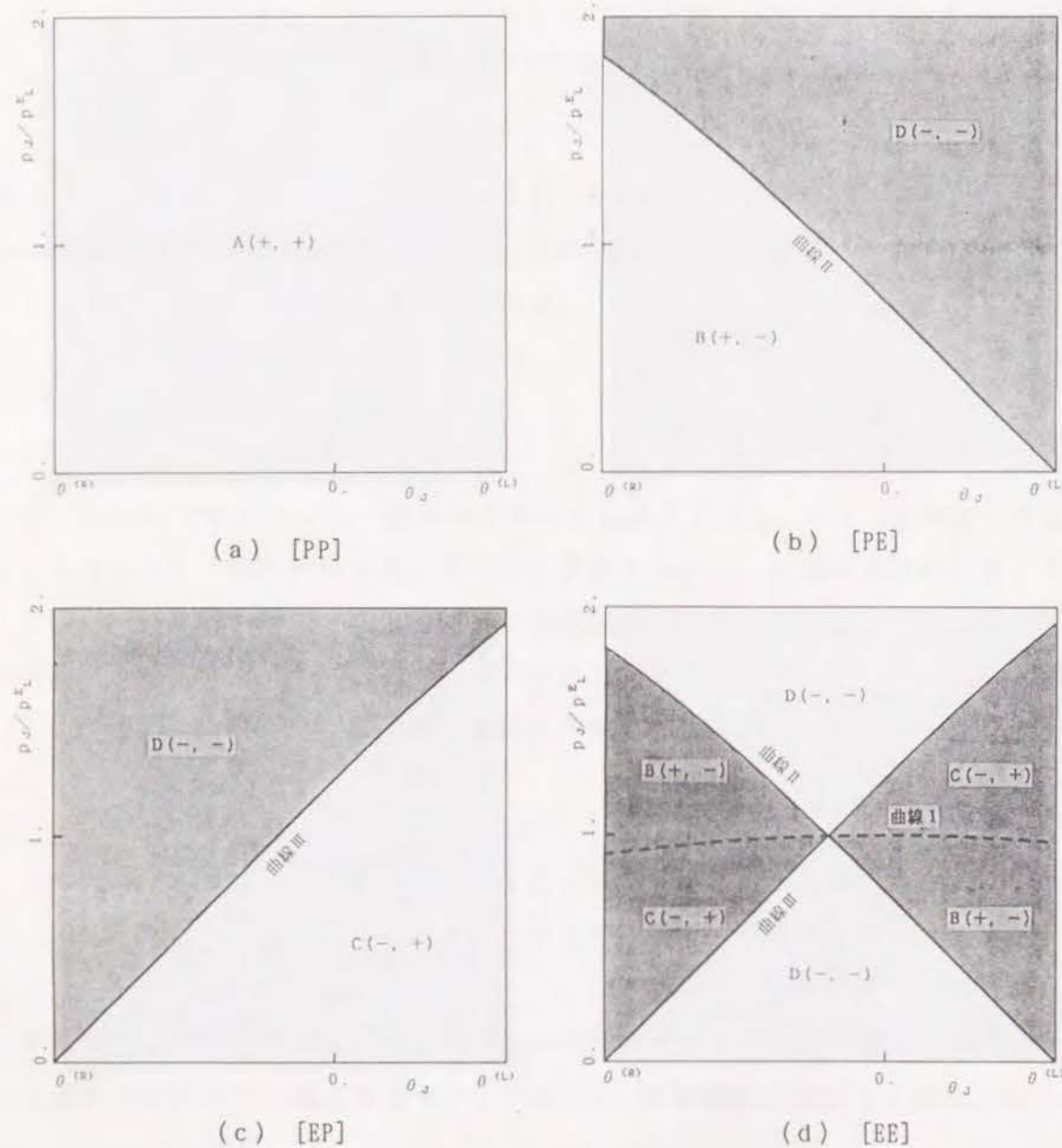


図-1.16.₂ [S 2 負]で $\dot{p} < 0$ の場合の整合領域と矛盾領域

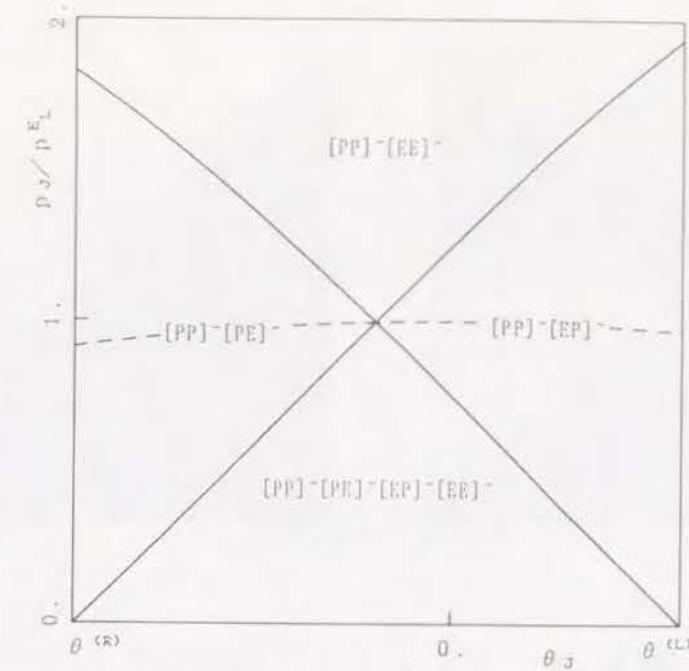


図-1.17 [S 2 負]の場合の解法 p による整合剛性領域図

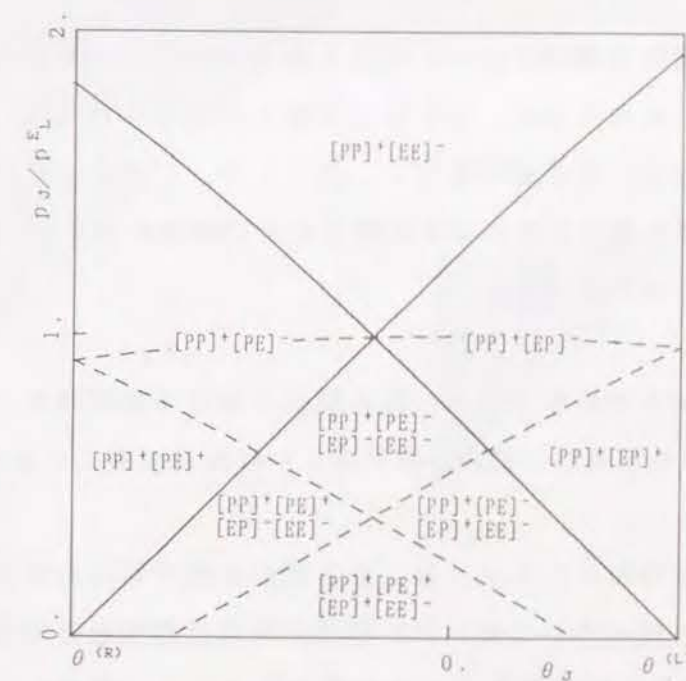


図-1.18 [S 2 負]の場合の解法 u による整合剛性領域図

上にある場合の解法 p による整合剛性領域図であり、 \dot{p} を負とする場合にのみ整合する剛性係数の組み合わせが存在する。

(2) 解法 u および 解法 θ による整合剛性領域図： 図-1.18, 1.19に、解法 u およ

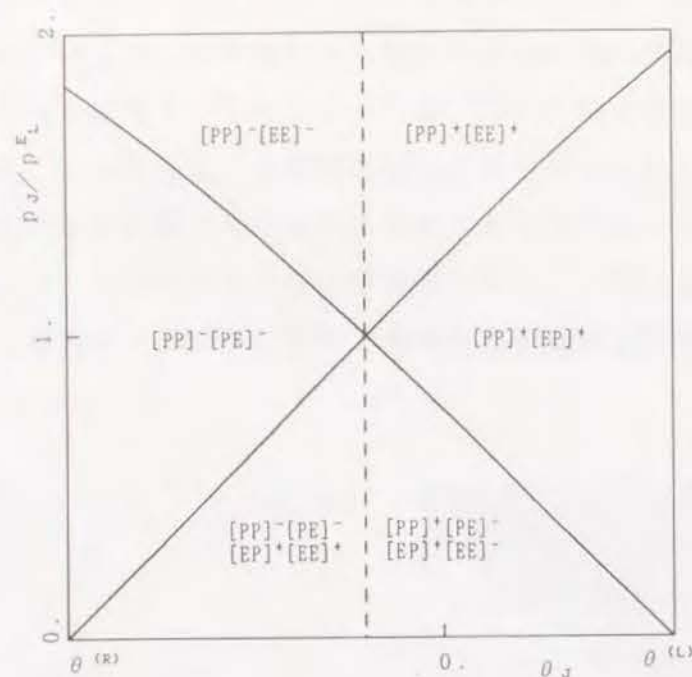


図-1.19 [S 2 負]の場合の解法 θ による整合剛性領域図

び解法 θ による整合剛性領域図を示す。制御変数速度の正負に関わらず、整合する剛性係数の組み合わせのみを見れば、塑性剛性係数が正の場合と同様、実線で区切られた領域分けとなり、解法による違いはない。図-1.18, 1.19と正の場合の図-1.11, 1.12を比較すると、塑性剛性係数による曲線Ⅱおよび曲線Ⅲが θ_d 軸より下に移行し、対象としている領域に現われない。

1.4.2.2 片方のばねの状態点が力-縮み関係における塑性経路上、

もう片方のばねの状態点が弾性あるいは除荷直線上にある場合 [S 3 負]

考えられる剛性係数の組み合わせ、および各剛性係数の組み合わせに対して許容されるばねの縮み速度の組み合わせは、塑性剛性係数が正の場合と同じである。1.4.1.2同様、右ばねの状態点が塑性経路上にある場合について、解法 p による整合剛性領域図を作成する。

図-1.20_{1,2}に $\dot{p} > 0$ および $\dot{p} < 0$ の場合の整合剛性の判定結果を示す。[EE]に関する図(b)は図-1.13_{1,2}と同じである。さらに、[EP]に関する図(a)も図-1.13_{1,2}の曲線Ⅰを θ_d 軸より下に移行したものとなる。 \dot{p} の正負それぞれの整合領域を1つの図に重ね合わせ、整合する剛性係数の組み合わせを記した結果を図-1.20.3(a),

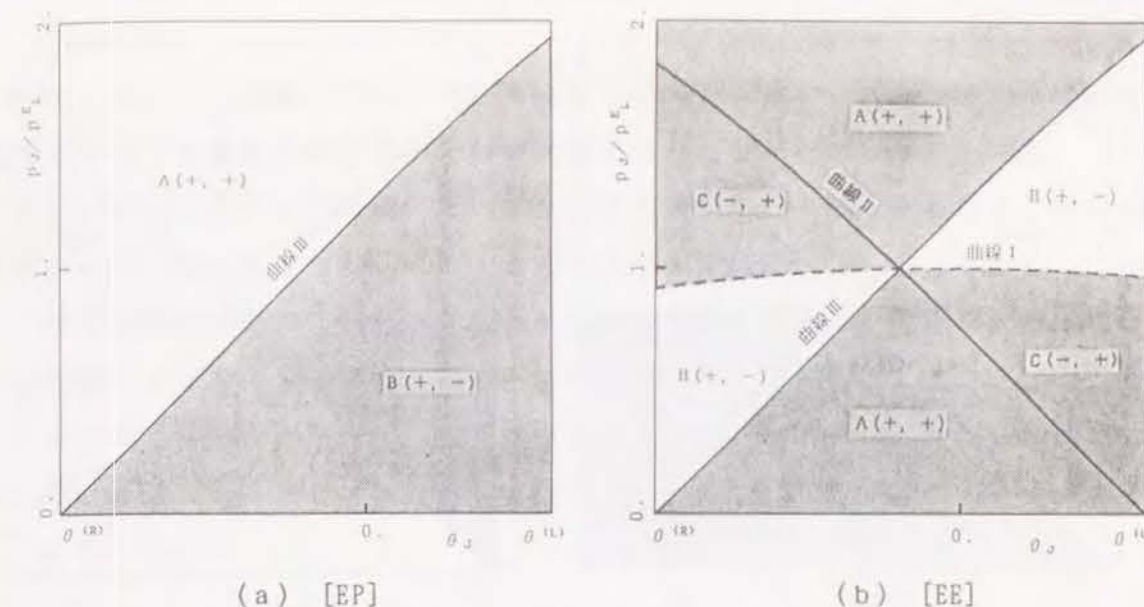


図-1.20.1 [S 3 負]の i) で $\dot{p} > 0$ の場合の整合領域と矛盾領域

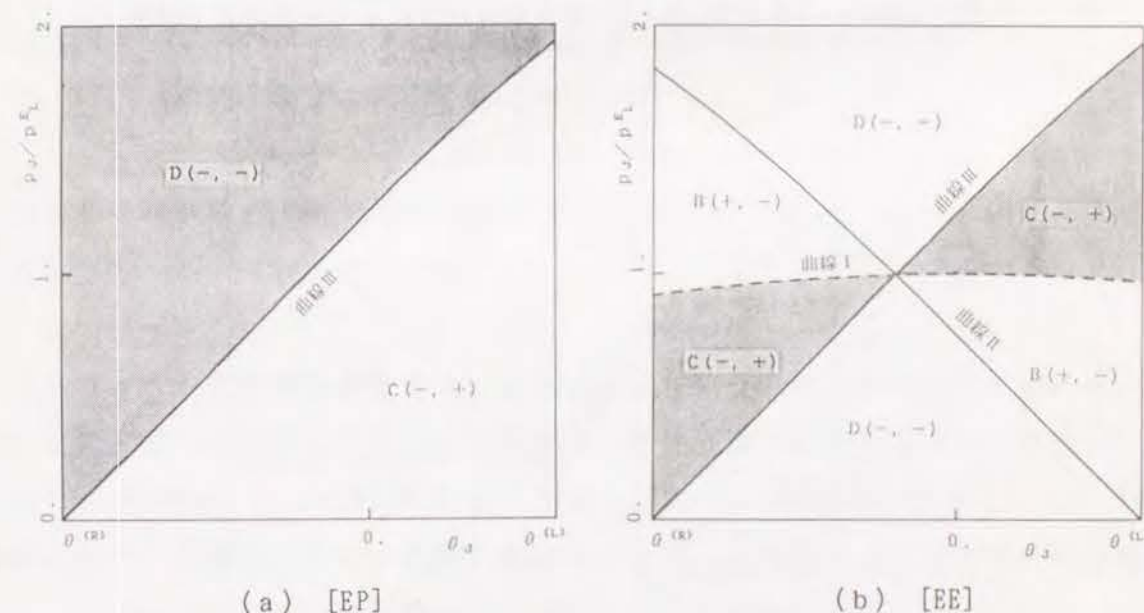
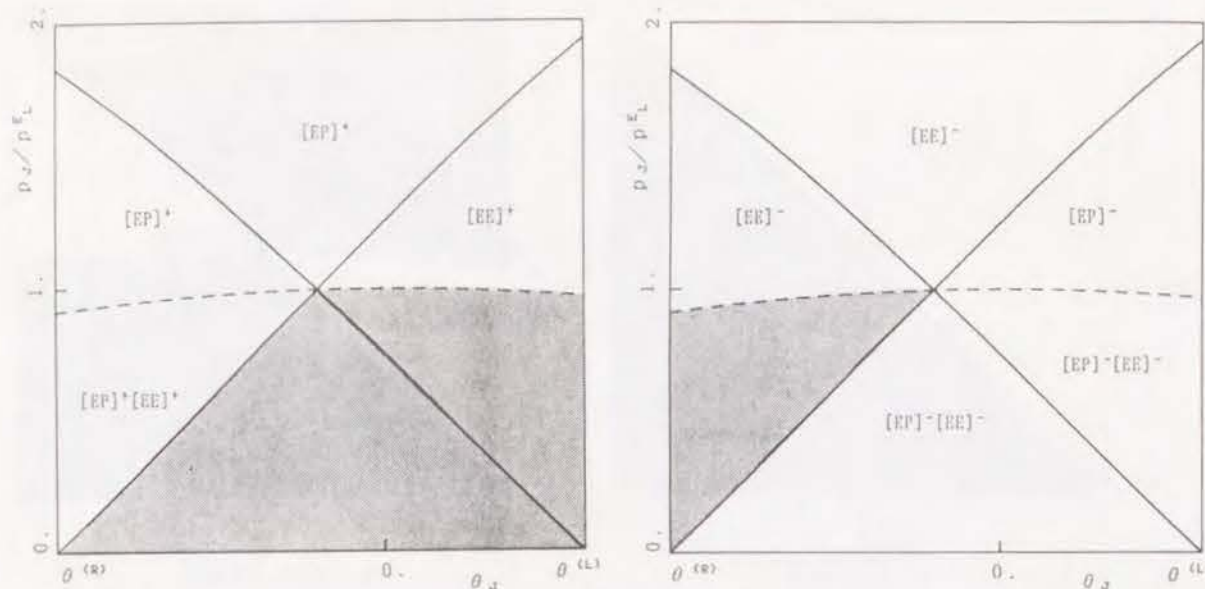


図-1.20.2 [S 3 負]の i) で $\dot{p} < 0$ の場合の整合領域と矛盾領域

(b)に、さらに、それらの整合領域を1つの図に重ね合わせた結果を図-1.21に示す。塑性剛性係数が正の場合と同様、全領域で[EP], [EE]の2つの剛性係数の組み合わせが可能である。

片方のばねの状態点が塑性経路上、もう片方のばねの状態点が弾性あるいは除荷直線上にある場合は、塑性剛性係数が正でも負でも、本質的な違いは見られない。



(a) $\dot{p} > 0$ の場合

(b) $\dot{p} < 0$ の場合

図-1.20.3 [S 3 負]の i) の場合の解法 p による整合剛性領域図

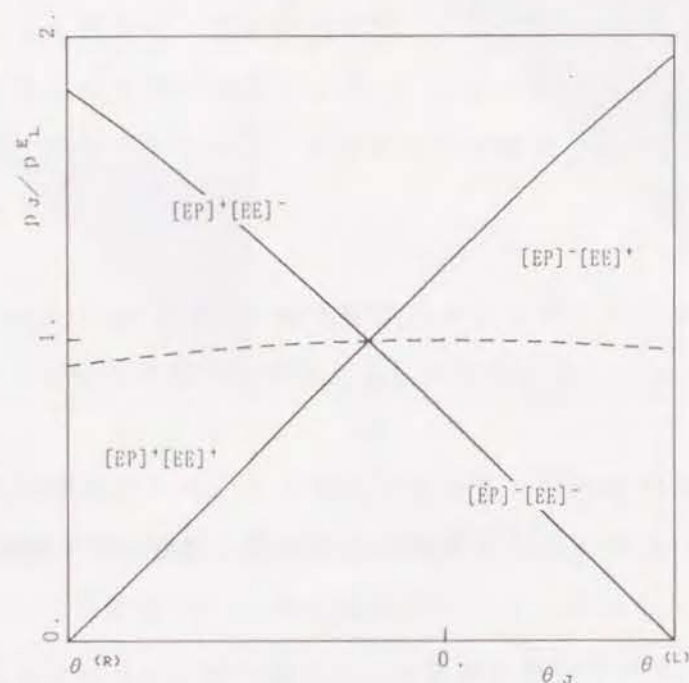


図-1.21 [S 3 負]の i) の場合の解法 p による整合剛性領域図

1. 5 ばねの縮み速度と剛性係数の組み合わせが矛盾する領域からの剛性選択過程

前節で制御変数速度の正および負の両符号を考えれば、この系では必ずばねの縮み速度と整合する剛性係数の組み合わせが存在することが確認された。また、当然であるが、領域分けされた各領域において整合する剛性係数の組み合わせは、解法すなわち制御変数の選択には依存しない。本節では、J 状態 (p_J, θ_J) において、仮定したばね剛性係数の組み合わせが非整合な組み合わせであると判定された領域すなわち矛盾領域にある場合、剛性係数の修正過程を通して、如何にして整合剛性を得るか、またどのような場合が循環剛性選択過程となるかを考察する。なお、各領域での整合する剛性係数の組み合わせは、解法に依存しないので、p を制御変数とする場合について検討する。

1.5.1 塑性剛性係数が正の場合

1.5.1.1 左右のばねの状態点がともに力-縮み関係における塑性経路上にある場合 [S 2 正]

両ばねの状態点が塑性経路上にある場合について、図-1.9.1の $\dot{p} > 0$ としたときの整合剛性の選択過程を考察する。

両方のばねが塑性剛性係数をもつ組み合わせ [PP] から整合剛性選択を始める。この [PP] という組み合わせは、両ばねの状態点が塑性経路上にある場合のいわゆる“比較ばね (comparison spring) [10, 21]”である。図-1.22は、図-1.9.1(a)の [PP] で薄網が施された領域、すなわち左右のばねのどちらかの縮み速度が矛盾する領域 B (+, -) および C (-, +) からの選択過程を示している。

ばねの縮み速度の組み合わせが B (+, -) となる領域では、右ばねの縮み速度が、式(1.7b)の構成則に矛盾する。したがって、右ばねの剛性係数を塑性剛性係数 E^b から弾性剛性係数 E に変更し、[PE] の剛性係数の組み合わせで整合性を調べることになる。[PP] における 2 つの B 領域のうち左側の領域であれば、[PE] の剛性係数の組み合わせで B 領域すなわち整合領域になり、この修正によって構成則に整合する剛性係数の組み合わせが得られる。一方、右側の領域は、[PE] の 3 つの領域、A、B および C 領域に対応しており、その位置によって、修正の結果は異なる。最右上部は B の整合

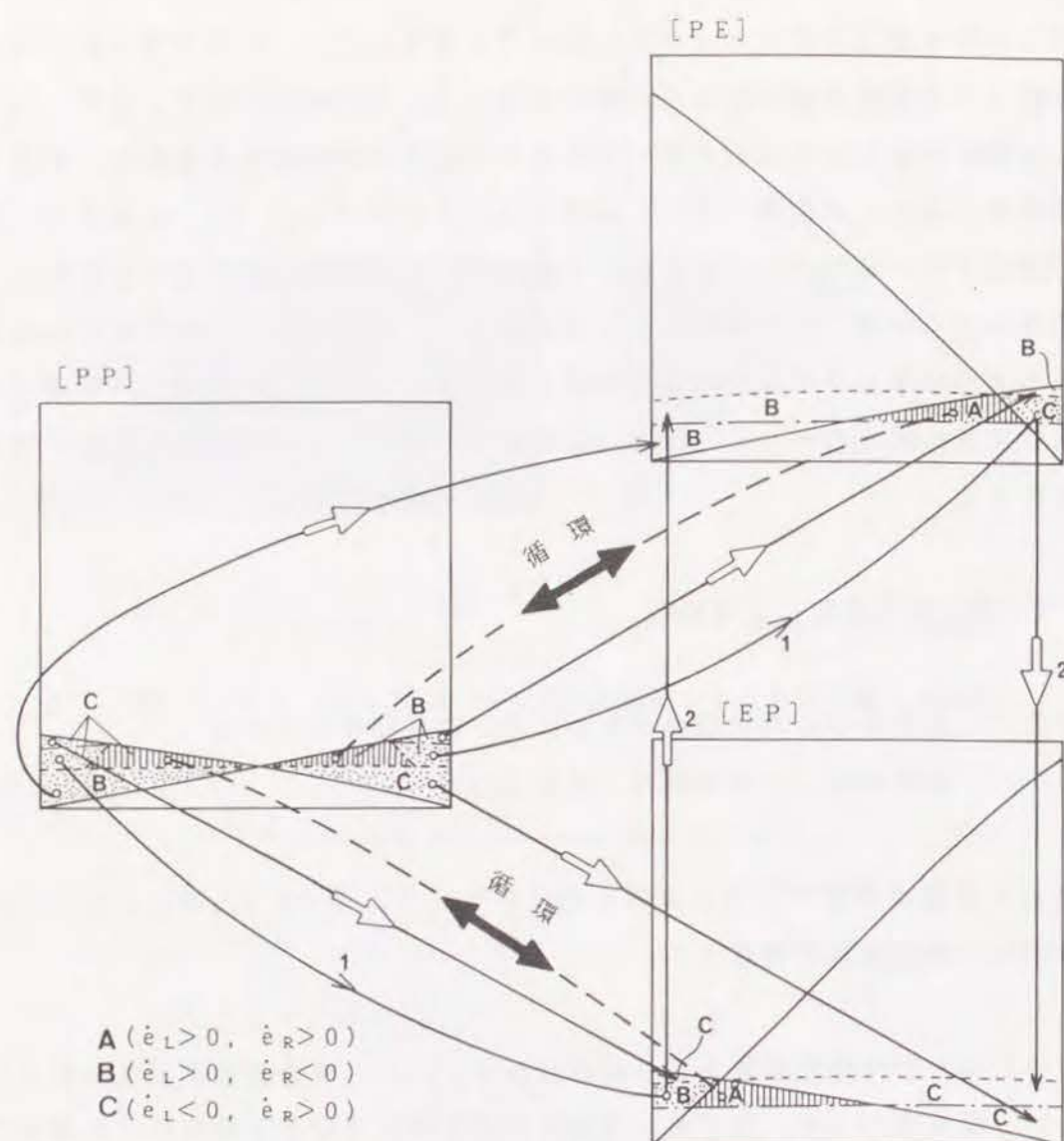


図-1.22 [S2正]の解法pで $\dot{p} > 0$ の場合の整合剛性選択過程

領域になるが、残りは[PE]でも矛盾と判定される。[PE]の剛性係数の組み合わせでは、縮み速度の組み合わせがA(+, +)となる領域に至る場合(図中、破線で示されている)は、再び右ばねの縮み速度が矛盾していることになり、右ばねの剛性係数を弾性剛性係数Eから再び塑性剛性係数 E^* に変更しなければならない。すなわち再び[PP]という剛性係数の組み合わせに戻ることになる。[PP]でばねの縮み速度を求めれば、当然、矛盾と判定され[PE]に、そして[PP]にという堂々巡りに陥る。この整合剛性の

選択過程は循環剛性選択過程である。また、[PE]の剛性係数の組み合わせで、縮み速度の組み合わせがC(-, +)となる領域に至る場合(図中、矢印に1を付した実線で示されている)は、両ばねとも式(1.7)の構成則に矛盾しており、左ばねの剛性係数を塑性剛性係数 E^* から弾性剛性係数Eに変更し、右ばねの剛性係数を再び塑性剛性係数 E^* に戻し、[EP]の剛性係数の組み合わせでの整合性を調べることになる。図中、[PE]から[EP]に白抜き矢印2を付した実線で示される選択過程である。その結果、[EP]の剛性係数の組み合わせで整合領域になるので、この修正で剛性選択が終了する。[PP]でばねの縮み速度の組み合わせがC(-, +)となり、矛盾とされた領域からの選択過程も同様に、整合剛性に至る経路と循環剛性選択過程となる領域とが見出せる。循環剛性選択過程となる領域は、[PP]の剛性係数の組み合わせで破線によって示される曲線Iより上にあり、 $\det[K]$ の符号が負となる領域で、3つの曲線の交点の両側に存在している。その領域は[PE]あるいは[EP]の剛性係数の組み合わせでは $\det[K]$ の符号は正である。

図-1.22で循環剛性選択過程となる2つの領域は、図-1.9.3(a)を見れば、この解法で \dot{p} を正として、整合する剛性係数の組み合わせが存在しないわけではない。しかし、従来の数値解析で通常採られている手順、ばねの縮み速度が矛盾する剛性係数を変更するという手順では、その整合する剛性係数の組み合わせに至ることができず、2つの剛性係数の組み合わせを交互に選択する循環剛性選択過程に陥る。

なお、図-1.9.4の[PP]以外の[PE]、[EP]あるいは[EE]の剛性係数の組み合わせにおける矛盾領域から整合剛性選択を始めた場合も、[PP]から始めたときと同じ領域が、[PP]→[PE]→[PP]あるいは[PP]→[EP]→[PP]の循環剛性選択過程に陥ることが確認される。

また、解法pで $\dot{p} < 0$ の場合の整合剛性選択過程の検討も図-1.9.2より上記と同様に展開できる。この場合は、[EE]→[PE]→[EE]あるいは[EE]→[EP]→[EE]の循環剛性選択過程に陥る領域がある。

1.5.1.2 片方のばねの状態点が力-縮み関係における塑性経路上、

もう片方のばねの状態点が弾性あるいは除荷経路上にある場合 [S3正]

右ばねの状態点が塑性経路上、左ばねの状態点が弾性あるいは除荷経路上にある図

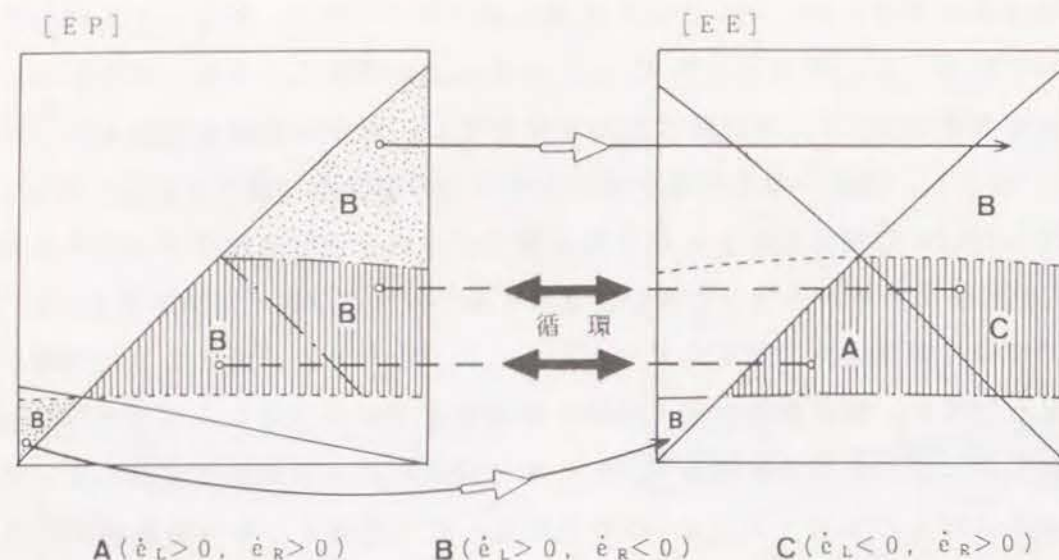


図-1.23 [S 3 正]の i) の解法 p で $\dot{p} > 0$ の場合の整合剛性選択過程

1.13.1の矛盾領域からの整合剛性選択過程を考察する。

まず、[EP]から整合剛性選択を始める。この剛性係数の組み合わせで縮み速度の組み合わせが矛盾となるのは $B(+, -)$ である。したがって、右ばねの剛性係数を塑性剛性係数 E^p から弾性剛性係数 E に変更し、剛性係数の組み合わせ [EE] での整合性を調べる。この過程を図-1.23に示す。[EE]で縮み速度の組み合わせが A, C に至る領域は、矛盾領域であり、再び右ばねの剛性係数を塑性剛性係数 E^p に戻さなければならない。したがって、この過程は $[EP] \rightarrow [EE] \rightarrow [EP]$ の循環剛性選択過程である。この領域は、図-1.13.3(a)を見ると $\dot{p} > 0$ では整合する剛性係数の組み合わせが存在しない領域であることがわかる。しかし、同図(b)から $\dot{p} < 0$ とすれば、整合する剛性係数の組み合わせが見出せる。また、[EE]の剛性の組み合わせから整合剛性選択を始めても、[EP]から始めた場合と同一の領域が $[EP] \rightarrow [EE] \rightarrow [EP]$ の循環剛性選択過程となる。

循環剛性選択過程となる領域は、[EP]の剛性係数の組み合わせで破線によって示される曲線 I より上にあり、 $\det[K]$ の符号が負となる領域である。[EP]から[EE]の剛性係数の組み合わせに移って、整合であると判定された領域は[EE]の組み合わせでも $\det[K]$ の符号が負となる領域である。

1.5.2 塑性剛性係数が負の場合

図-1.16の左右のばねの状態点がともに塑性経路上にある場合 [S 2 負] の整合剛性選択過程を考える。この場合 $\dot{p} > 0$ では、図-1.16.1からどの剛性係数の組み合わせに対してもばねの縮み速度の組み合わせと整合する剛性係数の組み合わせは存在しないことがわかる。しかし、数値解析実行時に整合剛性が存在しない状況に陥ったことをどのように判定するかは問題である。1.5.1項と同様の整合剛性選択の検討をここでも行なってみる。

まず、図-1.16.1(a)の[PP]の組み合わせから始める。全領域で縮み速度の組み合わせは $D(-, -)$ であり、左右のばねとも式(1.7)の構成則に矛盾している。したがって、両ばねの剛性係数を塑性剛性係数 E^p から弾性剛性係数 E に変更しなければならず、同図(d)の[EE]に移る。そこでも全領域が矛盾領域であり、さらにそこでの縮み速度の組み合わせに応じて新たな剛性係数の組み合わせを選択しなければならない。図-1.24にその変化過程を示す。[PP]の領域から始めて、2~4回の剛性係数の変更を経て最終的には、必ず再び[PP]に戻って来ることがわかる。すなわち、[S 2 負]の整合剛性選択過程は全て循環剛性選択過程である。ここでは、これまでの2つの剛性係数の組み合わせを交互に繰り返す過程の他に、いくつかの組み合わせを巡る循環剛性選択過程の例を含んでいる。[PP]以外の[PE], [EP]あるいは[EE]の剛性係数の組み合わせから整合剛性選択を始めても、全く同様である。

[PP]の剛性係数の組み合わせで、 $\det[K]$ の符号は全領域正であるが、その2つの固有値はともに負であり、剛性行列は正定値ではない。また、[PE], [EP]の剛性係数の組み合わせでも全領域で剛性行列は正定値ではない。

片方のばねの状態点が塑性経路上、もう片方のばねの状態点が弾性あるいは除荷経路上にある場合は、1.5.1.2と同様の展開となることは、塑性剛性係数が正の場合の図-1.13と負の場合の図-1.20の比較から明らかである。

1.5.3 循環剛性選択過程

本節の考察によって、循環剛性選択過程は、解析目的から制御変数の速度方向を指定した場合に生じ、その循環剛性選択過程には2つの種類があることが明らかとなった。すなわち、

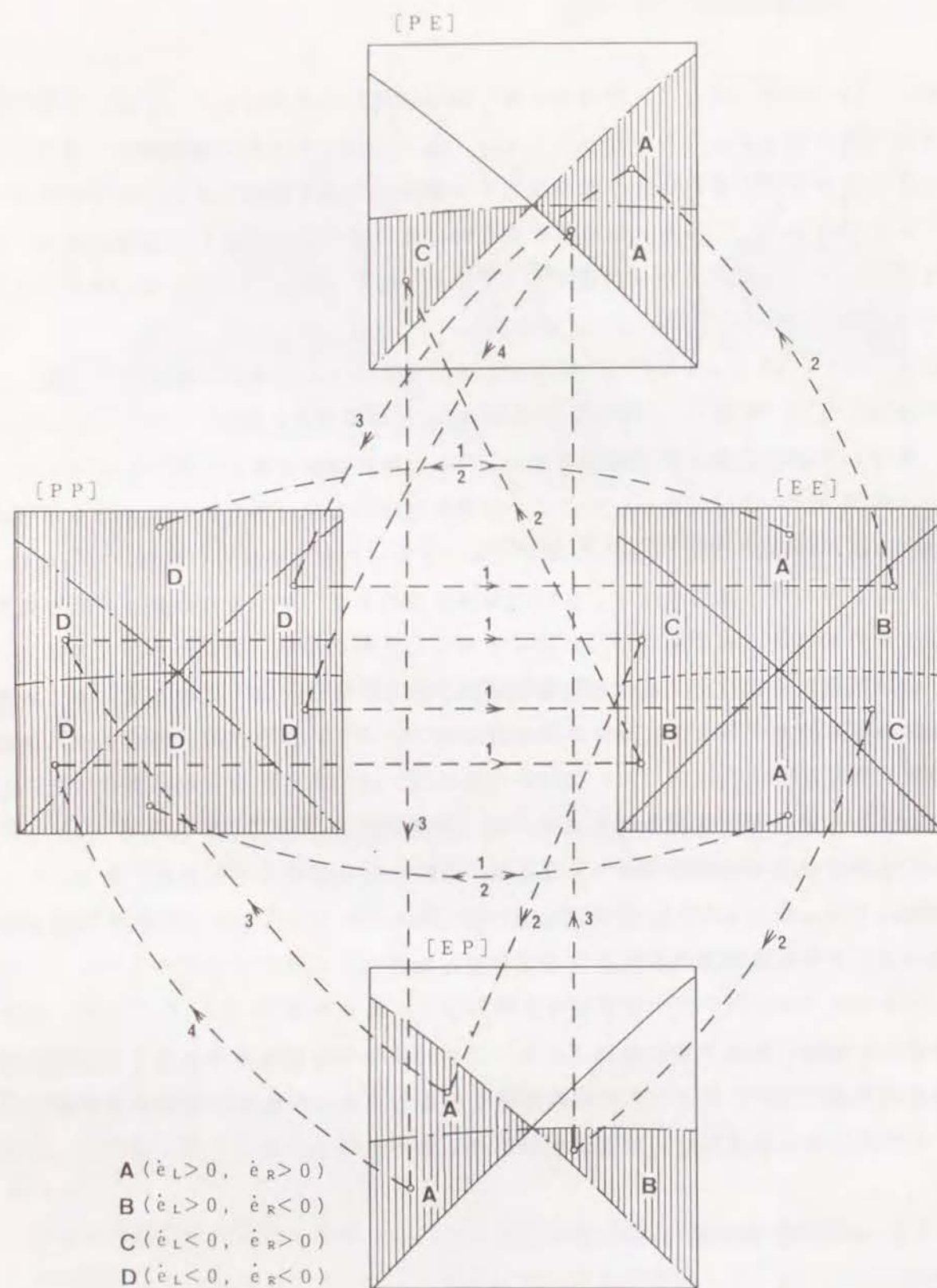


図-1.24 [S2負]の解法 $\dot{p} > 0$ の場合の整合剛性選択過程

循環剛性選択過程(I)・・・1.5.1.1で見られた選択過程で、制御変数の求めたい速度方向に整合する剛性係数の組み合わせはあるが、各ばねの縮み速度に応じて、そのばねの剛性係数を変更する手段では、整合する剛性係数の組み合わせに決して到達できない循環剛性選択過程

循環剛性選択過程(II)・・・1.5.1.2および1.5.2で見られた選択過程で、制御変数の求めたい速度方向に整合する剛性係数の組み合わせが全くないことによる循環剛性選択過程

の2種類である。いずれの循環剛性選択過程でも、両ばねの力-縮み状態点に関する“比較ばね”の剛性係数の組み合わせで剛性行列[K]は正定値ではない。

1.6 釣合経路の追跡と整合剛性探索方法の検討

前節では、循環剛性選択過程が、どのような $(p_J/p^{E_L}, \theta_J)$ 領域からの剛性選択過程で生じるかを示した。本節では、図-1.1の剛体-ばね柱モデルにおいて無載荷状態から鉛直荷重 p が静的に増加させられたときの釣合経路の追跡例を $p/p^{E_L}-\theta$ 平面上で概念的に示し、循環剛性選択過程に陥る領域に入る要因を考察する。また、これまでの知見を基に、循環剛性選択過程からの脱出方法を検討する。基本とする制御変数は鉛直荷重 p である。

1.6.1 剛性行列の固有値と固有ベクトル

循環剛性選択過程では、候補として選択された剛性係数の組み合わせのうち、少なくともその時点の両ばねの力-縮み状態点に関する“比較ばね”の剛性係数の組み合わせで剛性行列が、塑性剛性係数の正負に関わらず正定値でないという特性がある。弾性幾何非線形解析において、系がある釣合状態で、その剛性行列の固有値の一つが0となり正定値でなくなると、その系は分岐点挙動あるいは極限点挙動を呈することはよく知られている(例えば、文献[11],[29])。このとき最小固有値0に対応する固有ベクトルで表わされるモードが、他の固有モードに比して支配的な変形モードとなる。この弾性幾何非線形解析における臨界点の特性と弾塑性解析において循環剛性選

扱過程に陥る際の剛性行列が正定値でないという特性の類似性から、その際の剛性行列の固有値と固有ベクトルが、弾塑性解析の整合剛性選択問題において重要な役割を演じる可能性があると予想される。剛性行列が正定値でなくなり循環剛性選択過程に陥った場合、その正定値でない剛性行列の最小固有値に対応する固有ベクトルで表わされるモードを、次の増分変形の支配的モードであると考え、そのモードに適合するばねの縮み速度に対応する剛性係数の選択を行ない、そのモードが進行する方向に解析を制御して、ばねの縮み速度と剛性係数の整合性を調べることは、最も自然な試みであろう。それゆえ、まず、整合剛性探索方法を検討する準備として、解法 p の剛性行列 [K] の固有値と固有ベクトルの表現を示す。

制御変数を鉛直荷重 p とする解法 p では、解くべき方程式は 1.3.1 に示したように次の式 (1.15) である。

$$[K]\{\dot{D}\} = \dot{p}\{G_J\} \quad (1.15)$$

ここに、

$$[K] = \begin{bmatrix} C_R + C_L & (C_R - C_L)a \cos \theta_J \\ (C_R - C_L)a & (C_R + C_L)a^2 \cos \theta_J - p_J L \sec^2 \theta_J \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

$$\{\dot{D}\} = \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}, \quad \{G_J\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ L \tan \theta_J + \zeta \end{Bmatrix} \quad (1.17, 18)$$

$C_R + C_L = m$, $C_R - C_L = n$ とおいて、剛性行列 [K] の固有値を ρ とすると、

$$\rho = \frac{1}{2} \{m + m a^2 \cos \theta_J - p_J L \sec^2 \theta_J \pm \sqrt{Q}\} \quad (1.50)$$

ここに、

$$Q = (m - m a^2 \cos \theta_J + p_J L \sec^2 \theta_J)^2 + 4 n a^2 \cos \theta_J \quad (1.51)$$

である。

$C_R = C_L$ すなわち $n = 0$ のとき、行列 [K] は対角行列となり、式 (1.50) の二つの固有値はその対角項となる。すなわち、

$$\rho = m, \quad m a^2 \cos \theta_J - p_J L \sec^2 \theta_J \quad (1.52)$$

二つの固有値に対応する正規化された固有ベクトル $\{\phi\}$ は次のように書かれる。

$$\rho = m \text{ に対応する固有ベクトル: } \{\phi\} = \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.53a)$$

$$\rho = m a^2 \cos \theta_J - p_J L \sec^2 \theta_J \text{ に対応する固有ベクトル: } \{\phi\} = \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (1.53b)$$

一方、 $C_R \neq C_L$ すなわち $n \neq 0$ のときは、式 (1.50) の二つの固有値 ρ に対応する固有ベクトル $\{\phi\}$ は次のように書かれる。

$$\{\phi\} = \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n a \cos \theta_J \\ \rho - m \end{Bmatrix} \quad (1.54)$$

1.6.2 速度ベクトル $\{\dot{p} \ \dot{\theta}\}^T$

図-1.1 の剛体-ばね柱モデルにおいて無載荷状態から鉛直荷重 p が静的に増加させられたときの釣合経路の追跡例を $p/p^E_L - \theta$ 平面上で概念的に示すために、解法 p による J 状態の $(p_J/p^E_L, \theta_J)$ 平面での速度ベクトル $\{\dot{p} \ \dot{\theta}\}^T$ の向きを考える。剛体部のルートの回転角速度 $\dot{\theta}$ は、式 (1.27) によって次のように表わされている。

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{p}}{\det[K]} \frac{1}{2} \{-(1 - \alpha_J) \gamma_R + (1 + \alpha_J) \gamma_L\} \frac{L}{a} p^E_L \quad (1.27)$$

上式の中括弧 $\{ \}$ 内の符号は、 $\alpha_J = (\tan \theta_J + \zeta/L)/(a/L)$ より、例えば、 $\gamma_R + \gamma_L > 0$ であれば、

$$\theta_J > \theta_0 \equiv \tan^{-1} \left(\frac{\gamma_R - \gamma_L}{\gamma_R + \gamma_L} \frac{a}{L} - \frac{\zeta}{L} \right)$$

のとき正となる。この θ_0 は左右のばねの縮み速度 \dot{e}_L と \dot{e}_R のそれぞれの符号が変わる境界曲線 II および III の交点の θ_J 座標値であり。またこの点は、 $\det[K]$ の符号が変わる境界曲線 I 上にあり、 $\gamma_R = \gamma_L$ のときは分岐点の θ_J 座標値である。

\dot{p} を正とし、 $\gamma_R + \gamma_L > 0$ としたときの速度ベクトル $\{\dot{p} \ \dot{\theta}\}^T$ の概念図を図-1.25 に示す。ベクトルは \dot{p} , $\dot{\theta}$ の符号のみから概念的に描いてある。左右のばねの剛性係数の組み合わせが変化すると、破線で示された曲線 I と $\theta = \theta_0$ の直線が移動する。

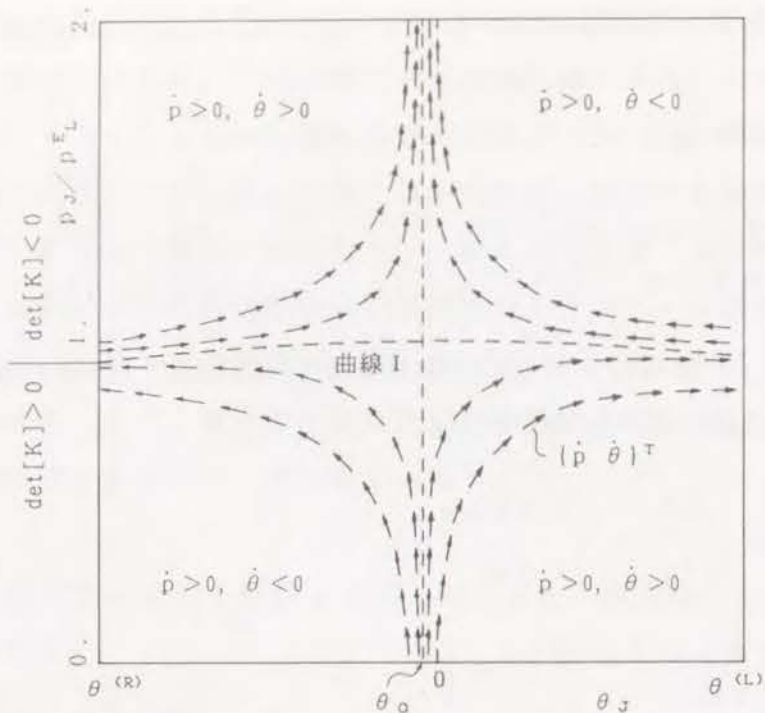


図-1.25 解法 p ($\dot{p} > 0$) による速度ベクトル $(\dot{p} \ \dot{\theta})^T$ の概念図

1.6.3 塑性分岐点近傍を通る釣合経路の追跡

左右のばねは同じばね縮み-力関係に従うものとする。ばねの弾性剛性係数は E とし、塑性剛性係数 E^t は正であるとする。以下の図は $\gamma_R = \gamma_L = E^t/E = 0.2$ として描いてある。また、系の幾何形状パラメータ a/L は 0.2 であり、荷重偏心パラメータの ϵ/L は、これまでの作図で採用してきた 0.05 より小さい 0.01 を採用している。なお、釣合経路は概念的に描いたものである。

① 無載荷状態から右ばねが降伏するまで； 図-1.26.1に示すように、ばねの剛性係数の組み合わせ $[EE]$ で、左右のばねが共に縮む $A(+, +)$ の領域内を釣合経路は辿る。鉛直荷重 p が右に偏心していることから、式(1.22)の α は正で、式(1.28)より右

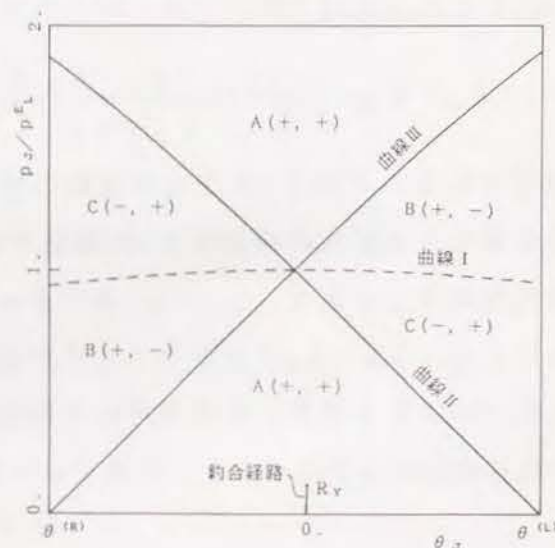


図-1.26.1 初期弾性域の釣合経路 $[EE]$

ばねの縮み速度 \dot{e}_R の方が、左ばねの縮み速度 \dot{e}_L より大きく、右ばねが先に降伏する。

図-1.26.1の R_Y 点で右ばねが降伏したとする。

② 右ばね降伏後から左ばねが降伏するまで； 図-1.26.2に示すように、ばねの剛性係数の組み合わせは $[EP]$ に変わる。しかし、未だ、釣合経路は、 $A(+, +)$ の領域内にあり、 L_Y 点で左ばねが降伏する。

③ 両ばねが降伏しているとき； 図-1.26.3に示すようにばねの剛性係数の組み合わせは $[PP]$ に変わる。釣合経路は、 $A(+, +)$ の領域内にあり、荷重 p はさらに増加される。

今、図-1.26.3の J 点に釣合経路が至ったとする。この釣合状態で、次ステップの増分を算定する。除荷開始点が予測できる増分摂動法を使用していれば、この増分は、左ばねの縮み速度の符号が正から負に変わる曲線 II と釣合経路が交わる点まで

となる。しかし、除荷開始点すなわちばねの縮み速度の符号の変化を予測できない解析法では、予め設定された増分刻み幅によって、除荷開始点を越えて図-1.27.1の a 、 b あるいは c 点に至るであろう。

a 点は曲線 I より下側にあり、そこでの $\det[K]$ は正である。一方、 b 、 c 点は曲線 I より上側にあり、そこでの $\det[K]$ は負である。図-1.27.1には、1.6.2項の速度ベクトル $(\dot{p} \ \dot{\theta})^T$ の概略の向きが矢印で示されている。式(1.27)における $\det[K]$ の値は、曲線 I を境に正から負に変わる。それゆえ、 a 点でのベクトルと b 、 c 点でのベクトルは $\dot{\theta}$ について逆向きである。前ステップでの増分の結果、曲線 I を越えると、

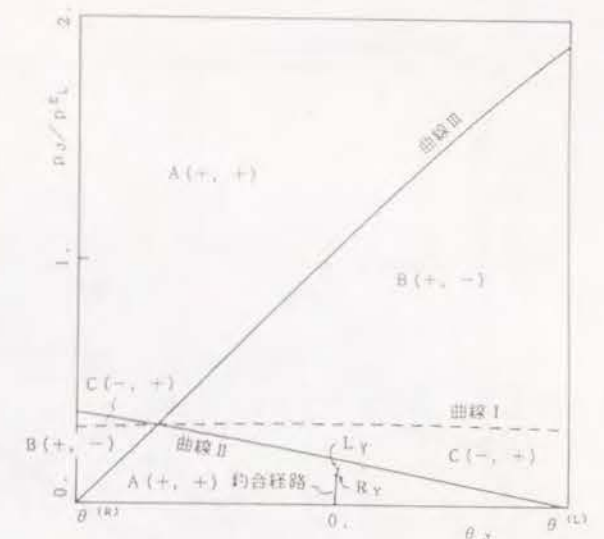


図-1.26.2 右ばね降伏後の釣合経路 $[EP]$

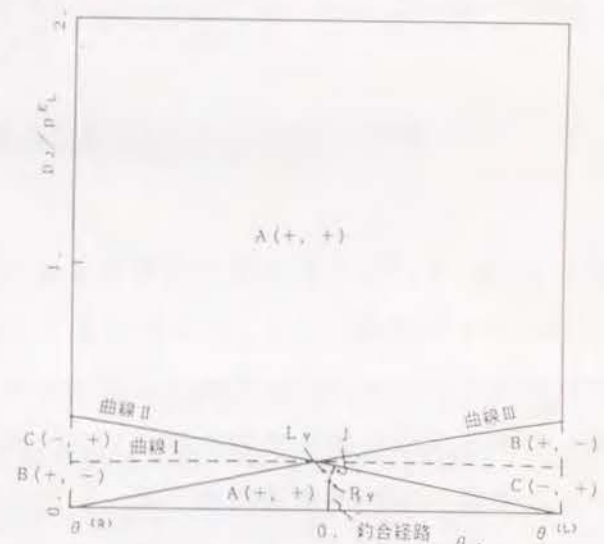


図-1.26.3 両ばね降伏後の釣合経路 $[PP]$

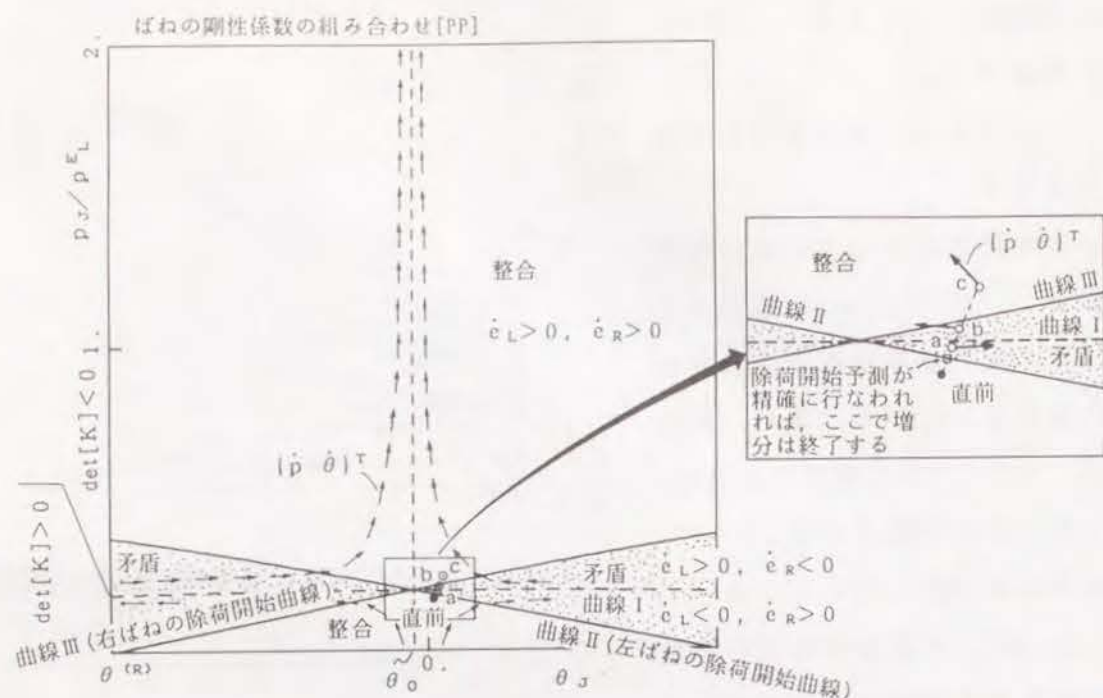


図-1.27.1 J点からの増分直後に曲線IIを越えた状態

ベクトル $(\dot{p} \ \dot{\theta})^T$ はそれまでの向きと θ について逆向きとなる。

a および b 点は図-1.9.1に示されるように $\dot{p} > 0$ ではばねの縮み速度とばねの剛性係数の組み合わせ[PP]が矛盾する領域である。したがって、縮み速度と剛性係数が矛盾しているばねの剛性係数を修正して、再度、ばねの縮み速度を求めなければならない。この整合剛性選択過程は、図-1.22に示されている。すなわち、a 点に至った場合は整合剛性を見出せるが、b 点に至った場合は、矛盾しているばねの剛性係数を修正するだけでは循環剛性選択過程に陥る。これら a, b および c 点における剛性選択過程を考察する。

なお、除荷開始点の予測が精確に行なわれれば、左ばねの除荷に応じて剛性係数の組み合わせを[EP]と修正し次ステップを実行すればよい。

< a 点に至った場合の剛性選択過程 > : ばねの剛性係数の組み合わせ[PP]で、左ばねの縮み速度が負となるので、左ばねの剛性係数を弾性剛性係数に変更し、[EP]で調べる。図-1.27.2にばねの剛性係数の組み合わせを[EP]とした場合の速度ベクトル $(\dot{p} \ \dot{\theta})^T$ の様相を示す。a 点付近の拡大図に示したように、[EP]の組み合わせで a 点は整合領域に入り、正解のベクトルに対し除荷開始点からの誤差は含むが、近似解

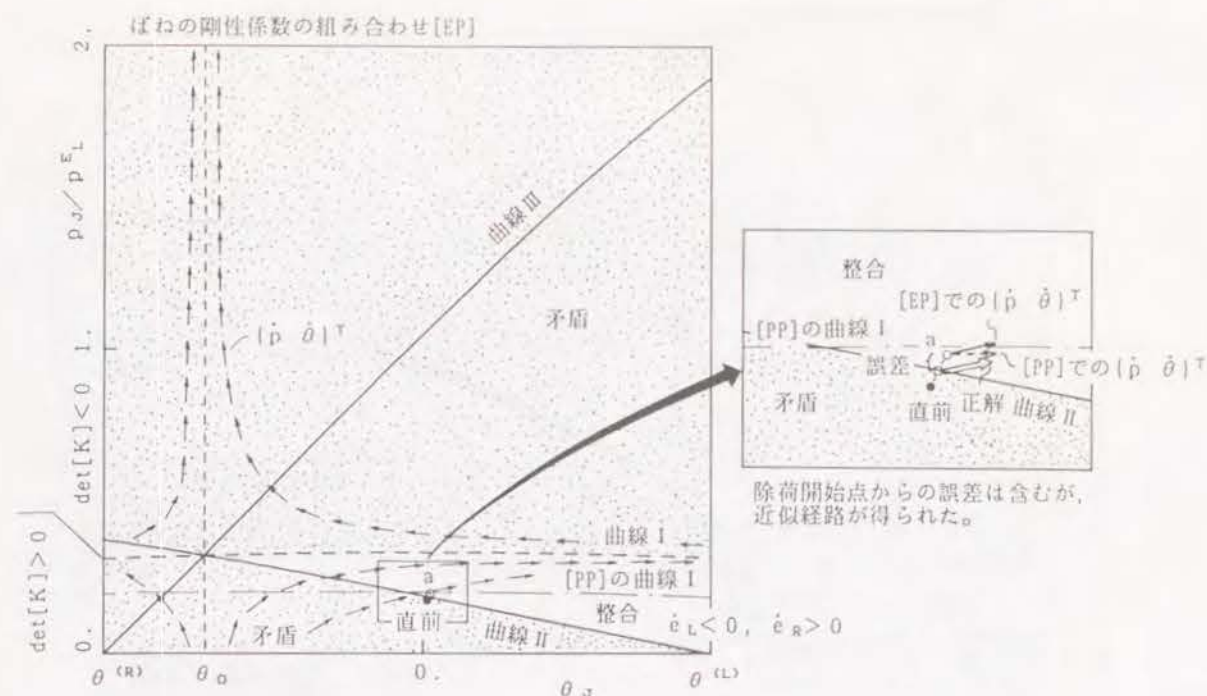


図-1.27.2 a点における整合剛性選択過程

ベクトルが得られる。

< b 点に至った場合の剛性選択過程 > : ばねの剛性係数の組み合わせ[PP]で、右ばねの縮み速度が負となるので、右ばねの剛性係数を弾性剛性係数に変更し、[PE]で調べる。図-1.27.3にばねの剛性係数の組み合わせを[PE]とした場合の速度ベクトル $(\dot{p} \ \dot{\theta})^T$ の様相を示す。b 点付近の拡大図を見ると、[PE]の組み合わせでも b 点是非整合な領域にあり、[PP]のとき同様、正解の解ベクトルの向きとは θ について逆の向きのベクトルとなっている。このときのばねの縮み速度に応じて剛性係数を修正すると、再び[PP]の組み合わせとなり循環剛性選択過程に陥る。

b 点は、図-1.27.1に示した剛性係数の組み合わせ[PP]において $\det[K]$ の符号が変わる境界曲線 I より上にある。このとき剛性行列 $[K]$ は正定値ではない。左右のばねの剛性係数値は同じであるので、1.6.1項で述べたように式(1.16)の剛性行列 $[K]$ は対角行列となり、その対角項が行列 $[K]$ の固有値となる。式(1.52)より行列 $[K]$ の固有値の一つは、 $\rho_1 = m a^2 \cos \theta_J - p_J L \sec^2 \theta_J = (p^c - p_J) L \sec^2 \theta_J$ である。曲線 I より上側では $p_J > p^c$ であるから、この固有値 ρ_1 は 0 に非常に近い負の値である。なお、 p^c は式(1.29)に表わされている。もう一つの固有値は $\rho_2 = m = 2 E^L =$

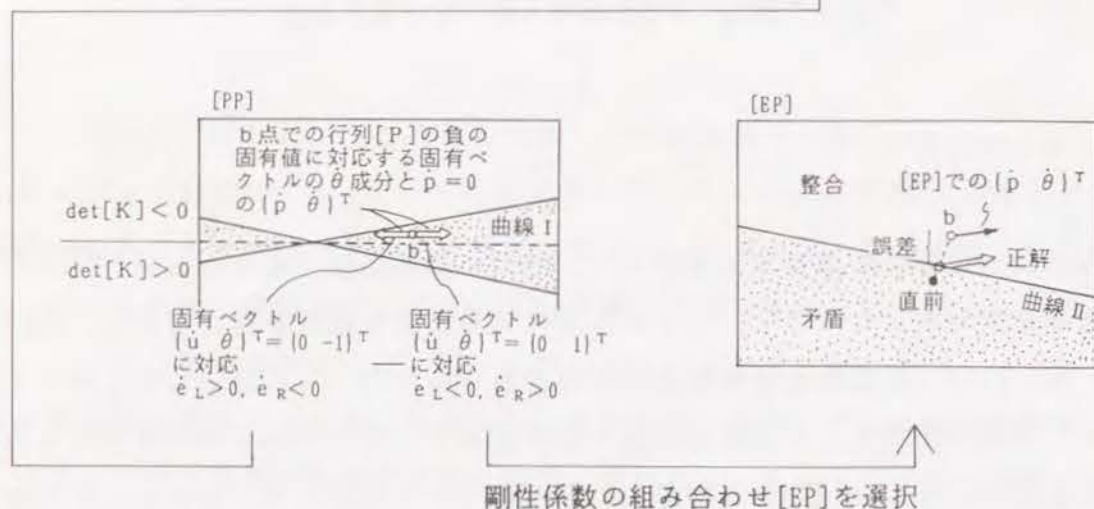
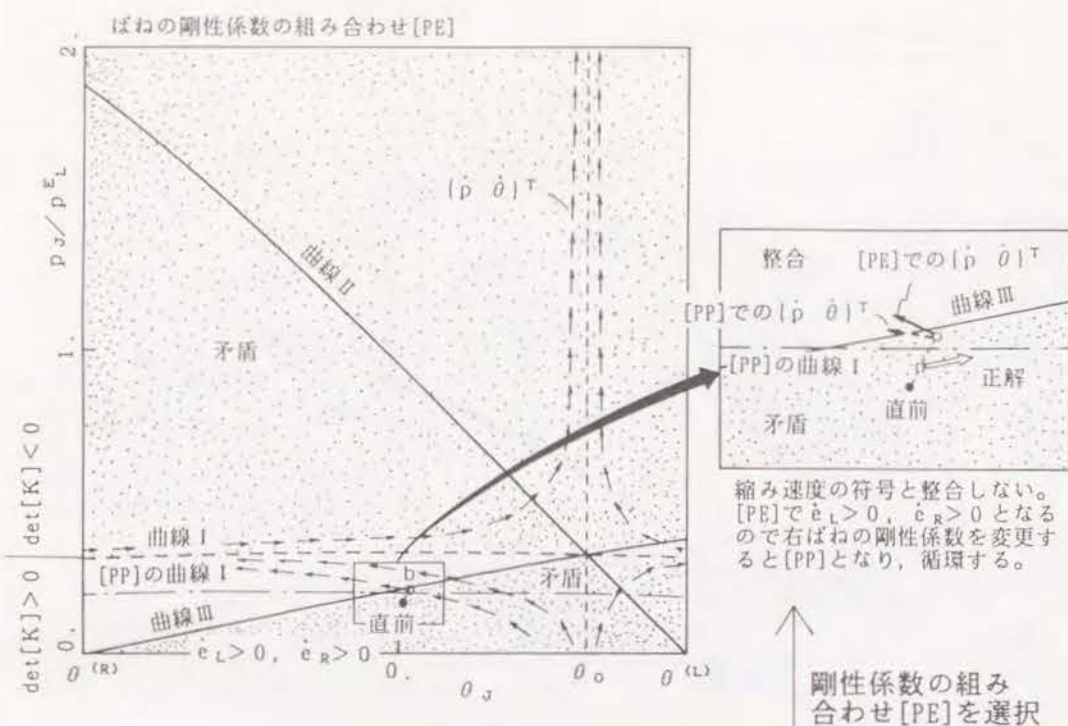


図-1.27.3 b点における整合剛性選択過程

0.4 Eであり正である。

0 に非常に近い負の固有値 ρ_1 に対応する固有ベクトル $\{\phi_1\}$ は、式(1.53b)より $\{\phi_1\} = \{\dot{u} \ \dot{\theta}\}^T = \{0 \ 1\}^T$ である。この固有ベクトル $\{\phi_1\}$ は、弾性座屈問題における座屈変形モード同様、この時点の増分変形を支配するモードであると考えられる。それゆえ、 $+\{\phi_1\}$ および $-\{\phi_1\}$ をそれぞれ変位速度ベクトルとしてばねの縮み速度を算定してみる。 $+\{\phi_1\} = \{\dot{u} \ \dot{\theta}\}^T = \{0 \ 1\}^T$ としたときの左右のばねの縮み速度は、式(1.12)より $\dot{e}_{L,R} = \mp a \cos \theta_J$ となる。 $\dot{e}_L < 0$ 、 $\dot{e}_R > 0$ であり、それらのば

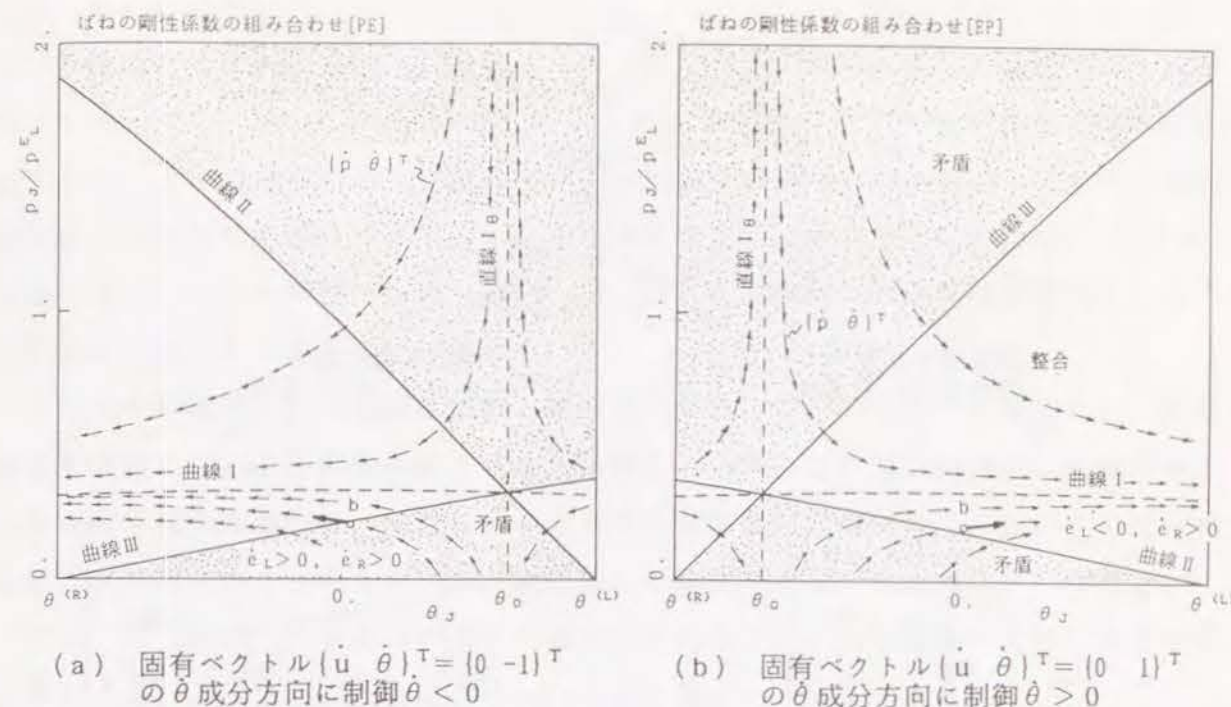


図-1.27.4 制御変数を θ に変更したときの速度ベクトル $\{\dot{p} \ \dot{\theta}\}^T$ の概念図

ねの縮み速度の符号に対応する剛性係数の組み合わせは[EP]である。一方、 $-\{\phi_1\} = \{\dot{u} \ \dot{\theta}\}^T = \{0 \ -1\}^T$ としたときは、 $\dot{e}_L > 0$ 、 $\dot{e}_R < 0$ となり、対応する剛性係数の組み合わせは[PE]である。剛性係数の組み合わせを[EP]あるいは[PE]としたときは、図-1.27.2、3に示すように、曲線 I は図-1.27.1の[PP]のときより上に移動し、b点での剛性行列[K]は正定値となる。 $+\{\phi_1\}$ を用いたときのばねの縮み速度の組み合わせによって剛性係数の組み合わせを修正すれば、[EP]の組み合わせが得られ、図-1.27.2から \dot{p} を正として、図-1.27.3に示す近似解ベクトルが得られる。

負の固有値 ρ_1 に対応する固有ベクトル $\{\phi_1\}$ のモードが進行する方向に解析を制御した場合を図-1.27.4に示す。ここで制御変数として、 $\{\phi_1\}$ のモードを代表する非0成分である $\dot{\theta}$ が選ばれている。解法 θ によるばね縮み速度の組み合わせは、図-1.27(c)に示したようになる。 $[EP]$ となる $+\{\phi_1\} = \{\dot{u} \ \dot{\theta}\}^T = \{0 \ 1\}^T$ で、その方向に $\dot{\theta}$ を制御すれば整合解ベクトルが見出せる。

もう一つの正の固有値 ρ_2 に対応する固有ベクトル $\{\phi_2\}$ を用いて、上記と同様の手続きを行なった場合について検討する。式(1.53a)より $\{\phi_2\} = \{\dot{u} \ \dot{\theta}\}^T = \{1 \ 0\}^T$ である。 $+\{\phi_2\}$ および $-\{\phi_2\}$ をそれぞれ変位速度ベクトルとしてばねの縮み速度を算定してみる。 $+\{\phi_2\} = \{\dot{u} \ \dot{\theta}\}^T = \{1 \ 0\}^T$ としたときの左右のばねの縮み速度は、式(1.12)より、 $\dot{e}_{L,R} = 1$ となる。 $\dot{e}_L > 0$ 、 $\dot{e}_R > 0$ であり、それらのばねの縮み速

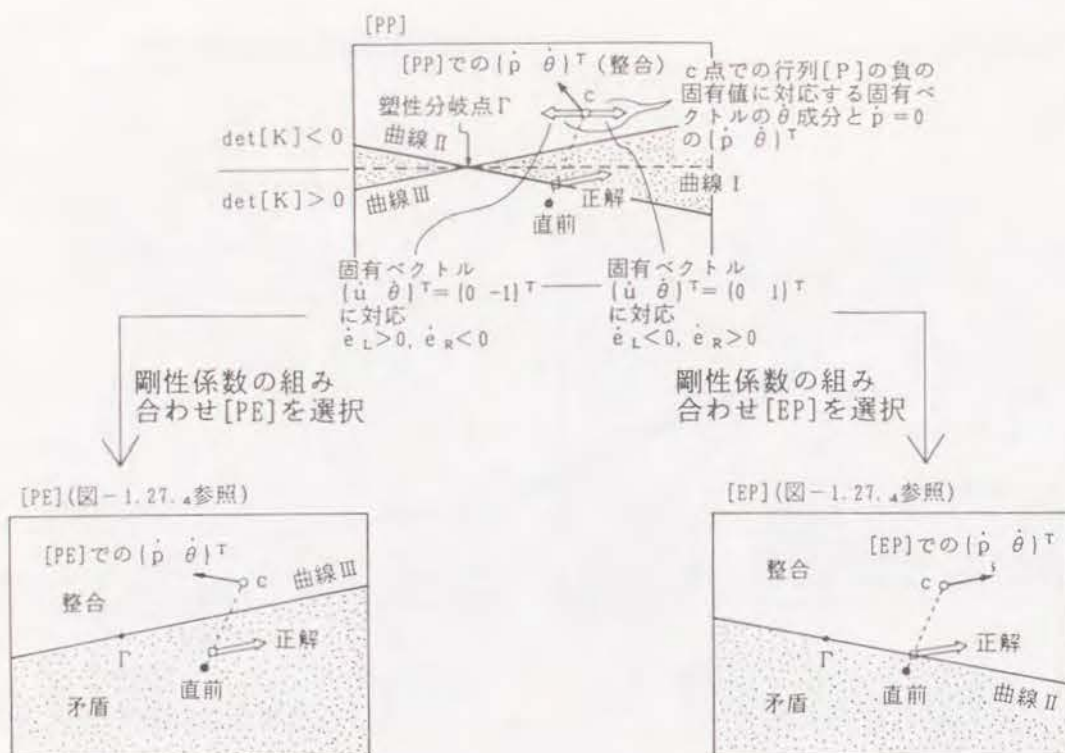


図-1.27.5 c点における整合剛性選択過程

度の符号に対応する剛性係数の組み合わせは[PP]である。一方、 $-\{\phi_2\} = \{\dot{u} \ \dot{\theta}\}^T = \{-1 \ 0\}^T$ としたときは、 $\dot{e}_L < 0$ 、 $\dot{e}_R < 0$ となり、適合する剛性係数の組み合わせは[EE]である。したがって、 $\{\phi_2\}$ を用いたのでは \dot{p} を正として整合する剛性係数の組み合わせ[EP]を得ることはできない。

< c点に至った場合の剛性選択過程 > : ばねの剛性係数の組み合わせ[PP]で、左右のばねの縮み速度はともに正であり、剛性係数と縮み速度は整合している。したがって、この場合は整合剛性選択問題としては何ら問題は生じないことになる。しかし、図-1.27.4の速度ベクトル $\{\dot{p} \ \dot{\theta}\}^T$ を見ると、このベクトルは荷重 p が際限なく増加していくことを示している。c点はb点同様 $\det[K]$ の符号が変わる境界曲線Iより上にあり、剛性行列 $[K]$ は0に非常に近い負の固有値をもっている。このとき、剛性係数の組み合わせ[PP]では、Hillの一般弾塑性体における解の唯一性の十分条件が満足されない[10, 21, 22]。

b点のとき行なった負の固有値に対応する固有ベクトルを用いて、ばねの縮み速度を算定し、それに対応する剛性係数を選択してみる。c点における行列 $[K]$ の負の固

有値もb点のそれと同様に ρ_1 で表わされる。 $+\{\phi_1\} = \{\dot{u} \ \dot{\theta}\}^T = \{0 \ 1\}^T$ からは[EP]の組み合わせが得られ、誤差はあるが正解のベクトルの向きに近似解ベクトルが得られる。一方、 $-\{\phi_1\} = \{\dot{u} \ \dot{\theta}\}^T = \{0 \ -1\}^T$ からは、[PE]の剛性係数の組み合わせとなり、その組み合わせで整合していることが確かめられる。[PE]の組み合わせによる解ベクトルは正解のベクトルとの向きが異なるが、c点が1.4.1.1の図-1.9.2の考察で述べたように塑性分岐点(図-1.27.5の Γ 点)に近いことを考慮すると、この解を分岐経路と考えるてもよいであろう。

ここでの考察は、たとえ剛性係数と縮み速度が整合していても、許容されない釣合経路を追跡している可能性があることを示唆している。この場合の検知にも循環剛性選択過程に陥る場合同様、剛性行列の正定値性が重要な情報であり、正でない固有値に対応する固有ベクトルを用いて、剛性係数の選択を行なうことは効果的である。

なお、図-1.27.5の Γ 点はc点と同様に、また図-1.27.4の曲線I上はb点と同様に扱えばよい。このとき、剛性行列 $[K]$ の固有値の一つは0である。

以上より、次の知見が得られる：

- 1) 塑性剛性係数が正のこの系の無載荷状態からの釣合経路の追跡では、増分解がばね縮みの除荷開始点を捉えられない場合に、循環剛性選択過程に陥る可能性があることがわかる。このことは応力ひずみ関係における除荷開始点を正確に予測することができる増分摂動法を導入すれば、循環剛性選択過程に陥る可能性が少なくなるという本研究者の経験に対して合理的な説明を与えるものである。
- 2) 従来の増分刻み幅を小さくすることによって除荷開始点を正確に捉える努力を行ない、循環剛性選択過程に陥ることを回避しようとする対処法も、ここでの考察からそれなりの意味があることがわかる。しかし、除荷開始点の予測のできないこれまでの線形増分型解析法はいかにも効率が悪く、3本の境界曲線が交わる塑性分岐点近傍では正解となる剛性係数の組み合わせに至ることのできる領域は極めて小さくなり、現実的に増分刻み幅を設定することは不可能となる。
- 3) 塑性分岐点近傍では、増分摂動法を用いても、僅かな数値誤差から循環剛性選択過程に陥る可能性は否定できない。それゆえ、循環剛性選択過程から合理的な近似解を見出して脱出できる方法を解析法に組み込んでおくことは解析を確実に遂行するためには不可欠である。
- 4) 塑性分岐点近傍では、たとえ剛性係数と縮み速度が整合していても、許容されない釣合経路を辿る場合がある。

5) 循環剛性選択過程に陥る場合も塑性分岐点近傍の許容されない釣合経路を辿る場合も剛性行列が正定値でないという特徴がある。剛性行列の正でない固有値に対応する固有ベクトルを用いて、剛性係数の組み合わせを選択する方法が有効である。

1.6.4 換算係数荷重を越えて

ばねが降伏する釣合経路の追跡

前項同様、左右のばねは同じばね縮み-力関係に従うものとする。ばねの塑性剛性係数は正であるものとする。以下の図は $\gamma_R = \gamma_L = 0.2$ として描いてある。また、系の幾何形状パラメータ a/L は 0.2, 荷重偏心パラメータ ζ/L は 0.01 である。

釣合経路は概念的に描いたものである。

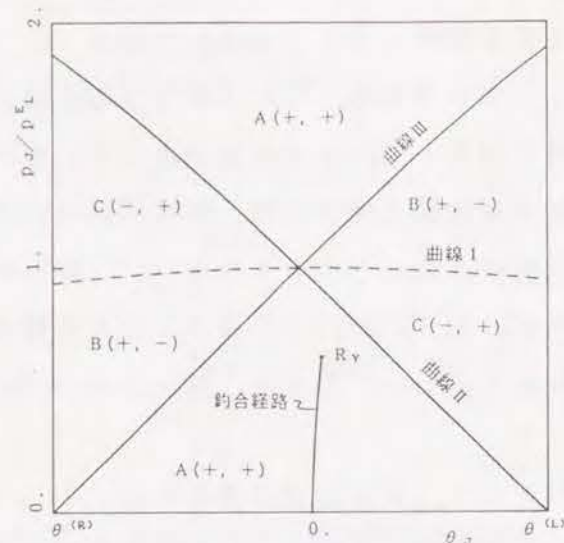


図-1.28.1 初期弾性域の釣合経路 ([EE])

① 無載荷状態から右ばねが降伏するまで;

図-1.28.1に示すように、ばねの剛性係数の組み合わせ[EE]で、左右のばねが共に縮む $A(+,+)$ の領域内を釣合経路は辿り、鉛直荷重 p が右に偏心していることから、左ばねが先に降伏する。右ばねの降伏した点を R_Y とする。

② 右ばね降伏後の追跡;

図-1.28.2に示すように、ばねの剛性係数の組み合わせは[EP]に変わる。 R_Y 点で \dot{p} を正としてばねの縮み速度を求めると、 $\dot{e}_L > 0$, $\dot{e}_R < 0$ すなわち $B(+,-)$ となり、右ばねは剛性係数と矛盾している。これを修正して右ばねの剛性係数を弾性係数に戻せば、図-1.28.1に示すように R_Y では、 $A(+,+)$ で循環剛性選択過程に陥る。これは、1.5.1.2 の図-1.23に示されている。この循環剛性選択過程は、 \dot{p} を正とする整合する剛性係数の組み合わせが存在しない循環剛性選択過程(II)である。

図-1.28.2で R_Y 点は、境界曲線 I より上にあり、剛性行列は負の固有値を一つ持っている。1.6.3項で行なったように、この負の固有値に対応する固有ベクトルを用いて剛性係数の組み合わせを選択してみる。式(1.50)で表わされる負の固有値を ρ_1 と

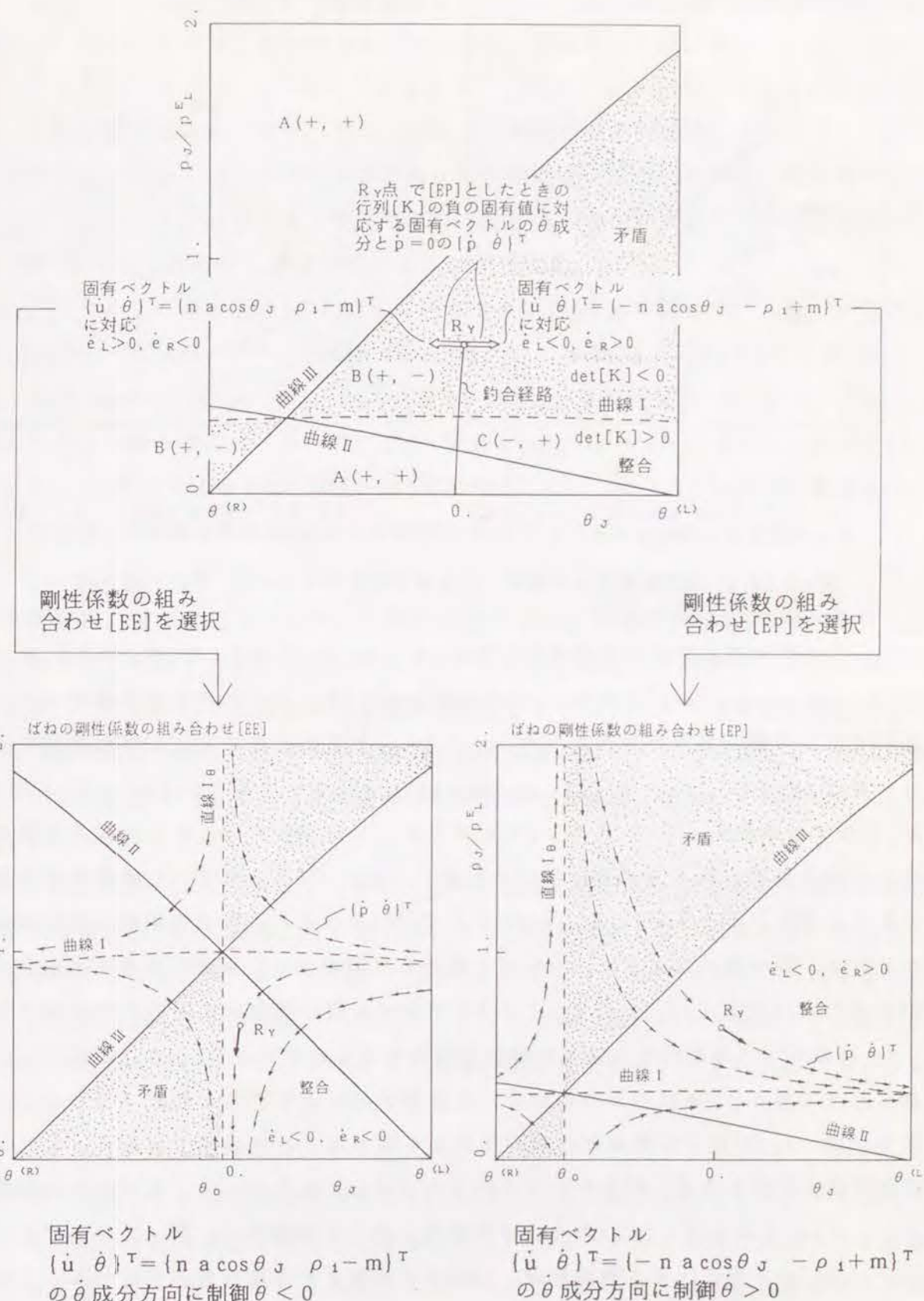


図-1.28.2 R_Y 点における整合剛性選択過程

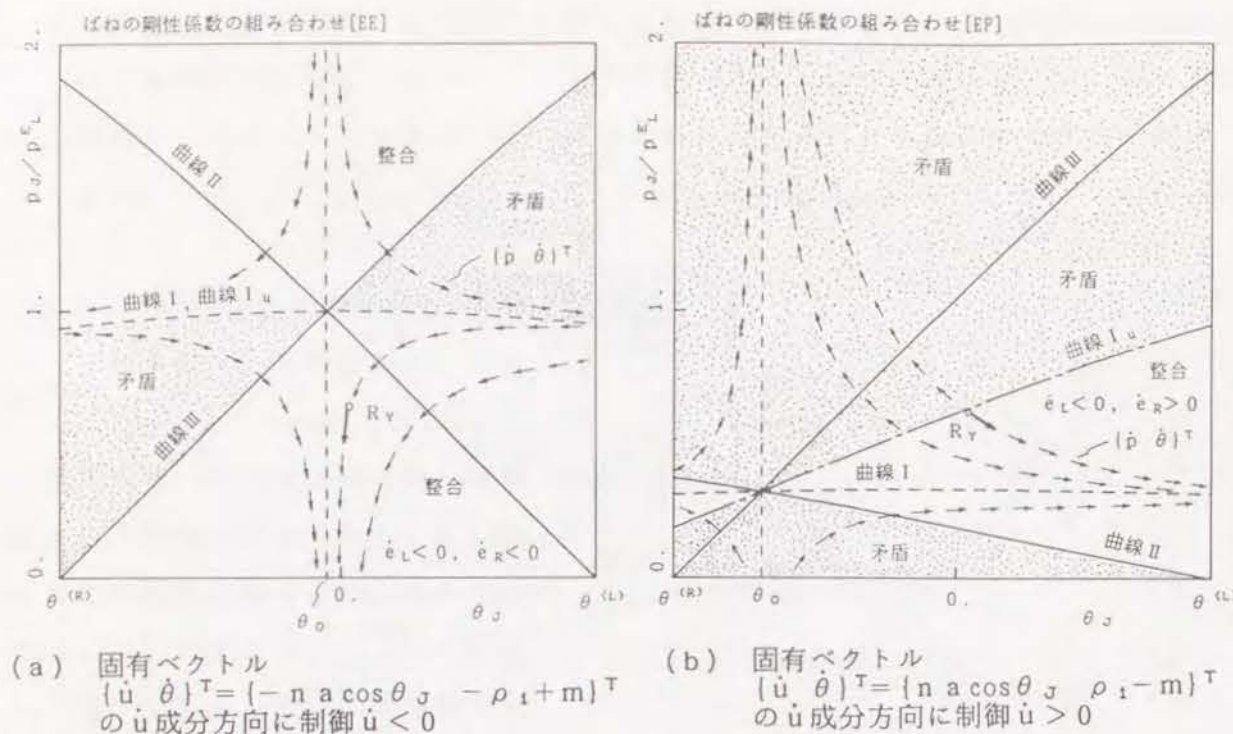


図-1.28.3 制御変数を \dot{u} に変更したときの速度ベクトル $(\dot{p}, \dot{\theta})^T$ の概念図

する。負の固有値に対応する固有ベクトル $\{\phi_1\}$ は、式(1.54)より $\{\phi_1\} = \{\dot{u}, \dot{\theta}\}^T = \{n a \cos \theta_J, \rho_1 - m\}^T$ である。 $+\{\phi_1\}$ および $-\{\phi_1\}$ をそれぞれ変位速度ベクトルとしてばねの縮み速度を算定してみる。 $+\{\phi_1\}$ としたときの左右のばねの縮み速度は、式(1.12)より、 $\dot{e}_L = (0.4E - \rho_1) a \cos \theta_J$ 、 $\dot{e}_R = (-2E + \rho_1) a \cos \theta_J$ となる。 $\rho_1 < 0$ であるから、 $\dot{e}_L > 0$ 、 $\dot{e}_R < 0$ である。したがって、これらの縮み速度に適合する剛性係数の組み合わせは[EE]である。一方、 $-\{\phi_1\}$ を用いて剛性係数の組み合わせを選択すると、 $\dot{e}_L < 0$ 、 $\dot{e}_R > 0$ より[EP]となる。これらの剛性係数の組み合わせでは、②で述べたように、 \dot{p} を正と規定して制御すると循環剛性選択過程から脱出することはできない。ここで、1.6.3項で述べた負の固有値に対応する固有ベクトル $\{\phi_1\}$ のモードが進行する方向に解析を制御することを試みる。 $\{\phi_1\}$ の成分はいずれも非0である。 $\{\phi_1\}$ の2つの成分 \dot{u} および $\dot{\theta}$ の次元をそろえ比較するために、 $\dot{\theta}$ 成分に図-1.1の逆Tの剛体部の腕の長さ a を乗ずることは妥当であろう。 \dot{u} と $a \dot{\theta}$ の絶対値を比較すると、明らかに $a \dot{\theta}$ の方が大きい。したがって、まず θ を制御変数とし、 $+\{\phi_1\}$ および $-\{\phi_1\}$ の $\dot{\theta}$ 成分の符号に応じて制御する。図-1.28.2に示すように、[EP]の $\dot{\theta}$ を正とする整合解が、[EE]の $\dot{\theta}$ を負とする整合解が見出せる。このとき \dot{p} はいずれも負となる。

次に、 u を制御変数とし、 $+\{\phi_1\}$ および $-\{\phi_1\}$ の \dot{u} 成分の符号に応じて制御する。

これを図-1.28.3に示す。 θ を制御変数としたときと同様に、[EP]の \dot{u} を正とする整合解が、[EE]の \dot{u} を負とする整合解が見出せる。やはり、このとき \dot{p} はいずれも負となる。しかし、 R_y 点がもう少し上にあれば、[EP]の $(\dot{p}, \dot{\theta})^T$ ベクトルは逆向きになり、矛盾領域に陥ってしまう。もし、そのように制御変数の選択が適当でなく整合解が見出せない場合には、もう一つの変数 θ を制御変数として試みれば、整合解が見出せる。したがって、 u よりも θ を制御変数として選ぶ方が望ましく、制御変数として $\{\phi_1\}$ のモードを代表する変数を採用するべきである。

もう一つの正の固有値 ρ_2 に対応する固有ベクトル $\{\phi_2\}$ を用いて、上記と同様の手続きを行なった場合について検討する。固有ベクトル $\{\phi_2\}$ は、式(1.54)より $\{\phi_2\} = \{\dot{u}, \dot{\theta}\}^T = \{n a \cos \theta_J, \rho_2 - m\}^T$ である。 $+\{\phi_2\}$ を変位速度ベクトルとすると、左右のばねの縮み速度は、 $\dot{e}_L = (0.4E - \rho_2) a \cos \theta_J$ 、 $\dot{e}_R = (-2E + \rho_2) a \cos \theta_J$ となる。 ρ_2 が正であるので、 \dot{e}_L 、 \dot{e}_R の符号は $0.4E$ 、 $2E$ と ρ_2 の大小関係により、負の固有値 ρ_1 を用いたときのように単純に判定できない。

塑性剛性係数が負の場合には、ばねが降伏すると、剛性行列は p_J の値に関わらず正定値でなくなり、1.5.2項で述べたように \dot{p} を正と規定して制御すると循環剛性選択過程(II)に陥る。その場合も負の固有値に対応する固有ベクトルを変位速度としてばねの縮み速度を算定し、それに対応する剛性係数の組み合わせを選定した後、固有ベクトルの速度成分が非0である変数を制御変数とすれば、整合解が見出せることが確かめられる。

1.5.2項の図-1.24に示した[S2負]で両ばねが塑性剛性係数をもつ場合にも循環剛性選択過程(II)に陥る。この場合は、2つの固有値がともに負となる。このときの固有ベクトルは、 $\{\dot{u}, \dot{\theta}\}^T = \{0, 1\}^T$ と $\{\dot{u}, \dot{\theta}\}^T = \{1, 0\}^T$ であり、それらを用いて上記と同様の手順を行なえば、[PP]の \dot{u} を正とする、[EE]の \dot{u} を負とする、[EP]の $\dot{\theta}$ を正とする、そして[PE]の $\dot{\theta}$ を負とする整合解が見出せる。いずれの解でも \dot{p} は負である。

本項の考察より、循環剛性選択過程(II)の場合には、負の固有値に対応する固有ベクトルを用いて剛性係数の組み合わせを選定し、固有ベクトルの非0成分である変数を制御変数とし、固有ベクトルの成分の符号に応じて制御すれば、整合解が見出せることがわかる。循環剛性選択過程(I)および塑性分岐経路に関する1.6.1項でも述べたように、この方法はそれらの整合解の探索にも有効である。

1. 7 剛性行列が正定値でなくなったときの整合剛性選択手順

1. 5 節および 1. 6 節で、剛性行列が正定値でなくなると、循環剛性選択過程に陥ったり、許容されない塑性経路を辿ったりすることが観察された。また、剛性行列が正定値でなくなった場合には、剛性行列の正でない固有値に対応する固有ベクトルを用いて剛性係数の組み合わせを選定し、その固有ベクトルを代表する非 0 成分の変数を制御すれば、必ず整合解が見出せることを示した。本節では、この整合剛性選択手順の論理的根拠を考察するとともに、その手順を改めて整理して示す。

1. 7. 1 剛性行列の固有値および固有ベクトルを用いた剛性選択過程の考察

制御変数を鉛直荷重 p とすると、解くべき方程式は次の式(1. 15)である。

$$[K]\{\dot{D}\} = \dot{p}\{G_J\} \quad (1. 15)$$

剛性行列 $[K]$ の固有値を ρ_1, ρ_2 ; $\rho_1 < \rho_2$ とし、対応する正規化固有ベクトルを $\{\phi_1\}, \{\phi_2\}$ とする。固有ベクトル $\{\phi_1\}, \{\phi_2\}$ からなる行列 $[\Phi] = [\{\phi_1\} \ \{\phi_2\}]$ を用いて次のように座標軸の変換を行なう。

$$\{\dot{D}\} = [\Phi]\{\dot{d}\}, \quad \{G_J\} = [\Phi]\{g_J\} \quad (1. 55a, b)$$

これを式(1. 15)に代入し整理すると、固有値 ρ_1, ρ_2 を対角成分とする係数行列をもつ方程式に変換される。

$$\begin{bmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{d}_2 \end{Bmatrix} = \dot{p} \begin{Bmatrix} g_{J1} \\ g_{J2} \end{Bmatrix} \quad (1. 56)$$

これを $\{\dot{d}\}$ について解くと、

$$\begin{Bmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{d}_2 \end{Bmatrix} = \dot{p} \begin{Bmatrix} g_{J1}/\rho_1 \\ g_{J2}/\rho_2 \end{Bmatrix} \quad (1. 57)$$

となる。したがって、式(1. 55a)より変位速度ベクトル $\{\dot{D}\}$ は次のように書ける。

$$\{\dot{D}\} = \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \dot{p} \left(\frac{g_{J1}}{\rho_1} \{\phi_1\} + \frac{g_{J2}}{\rho_2} \{\phi_2\} \right) \quad (1. 58)$$

式(1. 12)のばねの縮み速度-変位関係式をベクトル表示すると、

$$\begin{Bmatrix} \dot{e}_L \\ \dot{e}_R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -a \cos \theta_J \\ 1 & a \cos \theta_J \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \quad \text{あるいは} \quad \{\dot{e}\} = [B]\{\dot{D}\} \quad (1. 59)$$

であるから、ばねの縮み速度 $\{\dot{e}\}$ は式(1. 58)より次のように書ける。

$$\{\dot{e}\} = \begin{Bmatrix} \dot{e}_L \\ \dot{e}_R \end{Bmatrix} = \dot{p} \left(\frac{g_{J1}}{\rho_1} [B]\{\phi_1\} + \frac{g_{J2}}{\rho_2} [B]\{\phi_2\} \right) \quad (1. 60)$$

1. 6. 3 項のように、剛性行列 $[K]$ の固有値 ρ_1 が 0 あるいは 0 に非常に近い負の値になり、行列 $[K]$ が正定値でなくなった場合、式(1. 58)より ρ_1 に対応する固有ベクトル $\{\phi_1\}$ がこの剛性行列について増分変形を支配するモードであることがわかる。さらに、式(1. 60)より、 $\{\phi_1\}$ がばねの縮み速度の符号を支配していることも理解される。それゆえ、剛性行列 $[K]$ が正定値でなくなり、そのまま解析を続行すると循環剛性選択過程に陥る場合に、 ρ_1 に対応する固有ベクトル $\{\phi_1\}$ を次のステップを支配するモードであると考えすることは自然であろう。

両ばねの状態点が塑性経路上にあるときの剛性選択過程を考察する：

両ばねの剛性係数の組み合わせは $[PP]$ で、 $C_L = C_R = E^t$ である。このときの剛性行列を $[K_{PP}]$ と記すことにすると、 $[K_{PP}]$ の固有値は、1. 6. 1 項の式(1. 52)より、

$$\rho_1 = 2 E^t a^2 \cos \theta_J - p_J L \sec^2 \theta_J, \quad \rho_2 = 2 E^t \quad (1. 61a, b)$$

である。 p_J, θ_J が増加するにつれて、その値が減少する固有値を ρ_1 とした。 ρ_1, ρ_2 に対応する固有ベクトル $\{\phi_1\}, \{\phi_2\}$ は、式(1. 53)で示され、次のようになる。

$$\{\phi_1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \{\phi_2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1. 62)$$

したがって、座標変換行列 $[\Phi]$ は、

$$[\Phi] = [\{\phi_1\} \ \{\phi_2\}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1. 63)$$

である。したがって、式(1.17, 18)および式(1.55a, b)より、

$$\begin{Bmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{d}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{u} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} g_{J1} \\ g_{J2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L \tan \theta_J + \zeta \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (1.64a, b)$$

となる。式(1.58)より変位速度ベクトル $\{\dot{D}\}$ は次のように書ける。

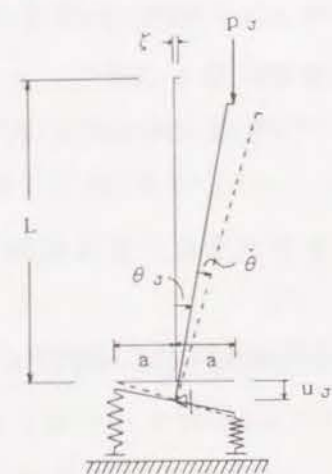
$$\{\dot{D}\} = \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \dot{p} \left(\frac{g_{J1}}{\rho_1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{g_{J2}}{\rho_2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) \quad (1.65)$$

また、ばねの縮み速度 $\{\dot{e}\}$ は式(1.60)より次のように書ける。

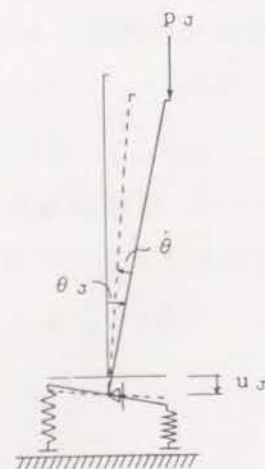
$$\{\dot{e}\} = \begin{Bmatrix} \dot{e}_L \\ \dot{e}_R \end{Bmatrix} = \dot{p} \begin{Bmatrix} -\frac{g_{J1}}{\rho_1} a \cos \theta_J + \frac{g_{J2}}{\rho_2} \\ \frac{g_{J1}}{\rho_1} a \cos \theta_J + \frac{g_{J2}}{\rho_2} \end{Bmatrix} \quad (1.66)$$

図-1.27.1の $\det[K_{PP}] = 0$ を表わす曲線 I の極近傍にある a, b 点について考える。これらの点では ρ_1 は 0 に極めて近い。したがって、式(1.65)および式(1.66)の第 1 項が支配的となる。 ρ_1 が正で極めて 0 に近い a 点では、式(1.65)より $\dot{p} > 0$ とすると、 $g_{J1} > 0$ であるから $\dot{\theta} > 0$ である。また、式(1.66)より $\dot{e}_L < 0$ (除荷)、 $\dot{e}_R > 0$ (負荷)であり、図-1.29(a)に示すように変形は進行しようとする。一方、 ρ_1 が極めて 0 に近い負の値となる b 点では、 $\dot{p} > 0$ とすると、 $\dot{\theta} < 0$ であり、 $\dot{e}_L > 0$ (負荷)、 $\dot{e}_R < 0$ (除荷)となる。それゆえ、変形は図-1.29(b)に示すように、(a)図の変形の進行方向とは逆向きに進行しようとする。

再度、図-1.27.1の a, b 点の $\{\dot{p} \ \dot{\theta}\}^T$ ベクトルの様相を図-1.30(a)に示す。これらのベクトルは概念的に描かれている。また、図(b)に、a, b 点の $\{\dot{u}/a \cos \theta_J \ \dot{\theta}\}^T$ ベクトルの

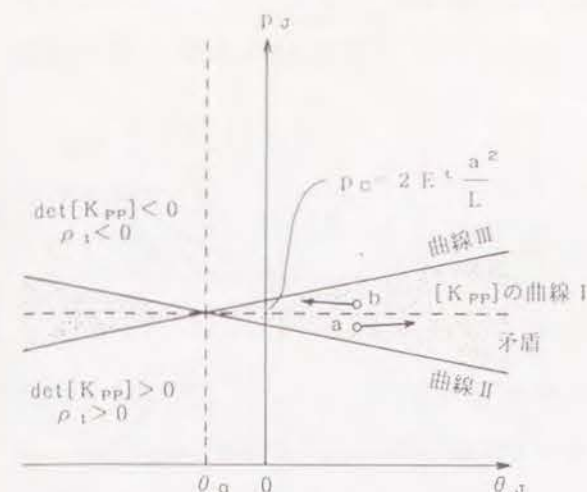


(a) a 点の場合 ($\rho_1 > 0$)

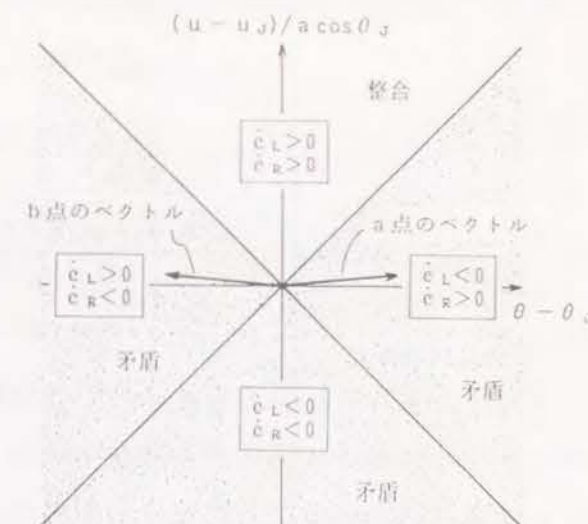


(b) b 点の場合 ($\rho_1 < 0$)

図-1.29 剛性行列の固有値 ρ_1 が 0 近傍のときの変形の進行方向



(a) $\{\dot{p} \ \dot{\theta}\}^T$



(b) $\{\dot{u}/a \cos \theta_J \ \dot{\theta}\}^T$ と 左右のばね速度の符号

図-1.30 剛性係数の組み合わせ [PP] のときの速度ベクトルの様相

様相を示す。図には式(1.12)の両辺を $a \cos \theta_J$ で除することによって、 \dot{e}_L , \dot{e}_R の符号を $(\dot{u}/a \cos \theta_J, \dot{\theta})$ から判定したばね縮み速度の組み合わせを示す。(a), (b) 両図のベクトルとも大きさ、向きとも概念的に描いたものである。

○ 剛性係数の組み合わせ [PP] のばね縮み速度の符号に応じて剛性係数を変更すれば、ばねの構成則に整合する剛性係数の組み合わせが得られる場合 < a 点の場合 > :

$\dot{e}_L < 0$ (除荷)、 $\dot{e}_R > 0$ (負荷)であるので、左ばねの剛性係数を弾性係数 E に変更し、剛性係数の組み合わせは [EP] となる。式(1.16)において $C_R = E^t$, $C_L = E$ とした剛性行列 $[K_{EP}]$ を用いて、次の方程式を解かなければならない。

$$[K_{EP}] \{\dot{D}\} = \dot{p} \{G_J\} \quad (1.67)$$

ここに、

$$[K_{EP}] = \begin{bmatrix} E^t + E & (E^t - E) a \cos \theta_J \\ (E^t - E) a & (E^t + E) a^2 \cos \theta_J - p_J L \sec^2 \theta_J \end{bmatrix} \quad (1.68)$$

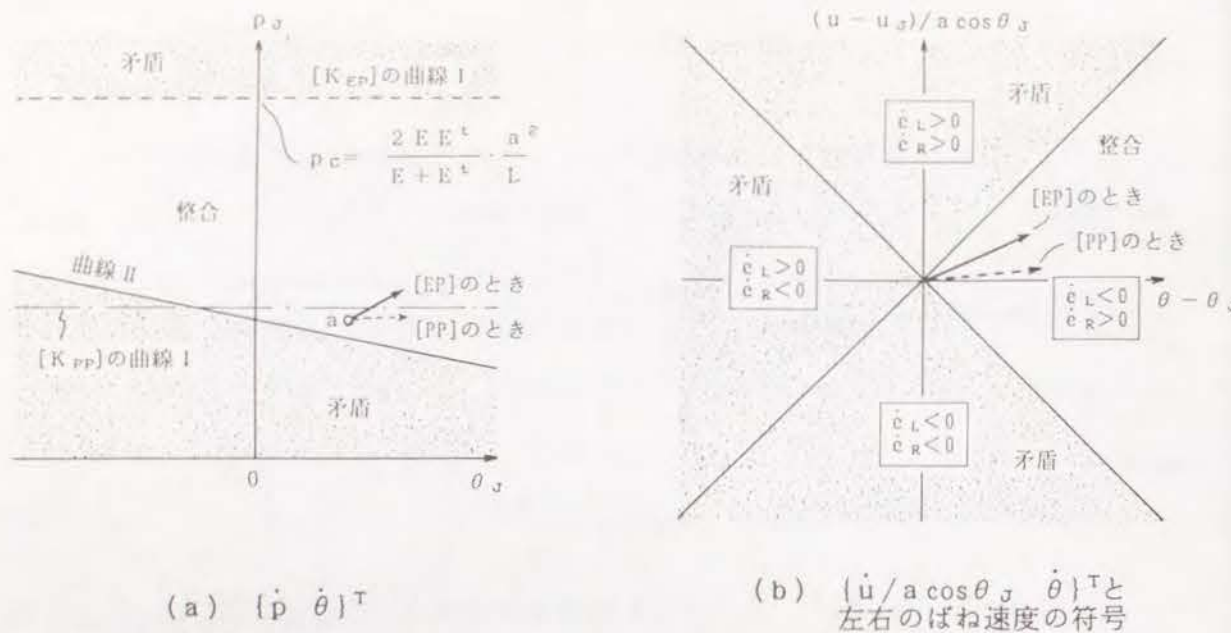


図-1.31 a点 ($\rho_1 > 0$) における速度ベクトルの変化の様相
—— 剛性係数の組み合わせ [EP]

である。式(1.61a, b)の ρ_1, ρ_2 を用い、 $E - E^t = n$ において式(1.68)を整理すると、

$$[K_{EP}] = \begin{bmatrix} \rho_2 + n & -n a \cos \theta_J \\ -n a & \rho_1 + n a^2 \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1.69)$$

と書ける。式(1.63)の座標変換行列 $[\Phi]$ を用いて、式(1.67)を次のように変換する。

$$[\Phi][K_{EP}][\Phi](\dot{d}) = \dot{p} \{g_J\} \quad (1.70)$$

これを解いて、変位速度ベクトル $\{\dot{D}\}$ を式(1.65)と比較するために、次のように整理する。

$$\{\dot{D}\} = \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \frac{\dot{p} \rho_1 \rho_2}{\det[K_{EP}]} \left\{ \left(\frac{g_{J1}}{\rho_1} + \frac{n(g_{J1} + a g_{J2})}{\rho_1 \rho_2} \right) \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} + \left(\frac{g_{J2}}{\rho_2} + \frac{n a \cos \theta_J (g_{J1} + a g_{J2})}{\rho_1 \rho_2} \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \right\} \quad (1.71)$$

式(1.71)において、 $\dot{p} > 0$, $\det[K_{EP}] > 0$, $\rho_2 > \rho_1 > 0$, $n = E - E^t > 0$ および $g_{J1} > 0$, $g_{J2} > 0$ であるから、 \dot{u} も $\dot{\theta}$ も正である。ばねの剛性係数の組み合わせが [PP] のときの式(1.65)と比較すると、固有ベクトル $\{\phi_1\} = \{0 \ 1\}^T$ および $\{\phi_2\} = \{1 \ 0\}^T$ に乗ずるそれぞれの係수에第2項が附加されていることがわかる。[PP] のと

きに比べて $\{\phi_2\}$ すなわち \dot{u} の変形への寄与分が多少増加していると言える。また、ばねの縮み速度 $\{\dot{e}\}$ は式(1.60)より次のように書ける。

$$\{\dot{e}\} = \begin{Bmatrix} \dot{e}_L \\ \dot{e}_R \end{Bmatrix} = \frac{\dot{p} \rho_1 \rho_2}{\det[K_{EP}]} \left\{ \begin{Bmatrix} -\frac{g_{J1}}{\rho_1} a \cos \theta_J + \frac{g_{J2}}{\rho_2} \\ \left(\frac{g_{J1}}{\rho_1} + \frac{2n(g_{J1} + a g_{J2})}{\rho_1 \rho_2} \right) a \cos \theta_J + \frac{g_{J2}}{\rho_2} \end{Bmatrix} \right\} \quad (1.72)$$

上式において、 \dot{e}_L の $\{ \}$ 内の表現は式(1.66)の [PP] のときと同じである。したがって、 $\dot{e}_L < 0$ (除荷), $\dot{e}_R > 0$ (負荷) であり、ばねの剛性係数の組み合わせ [EP] とばねの縮み速度の符号は整合している。剛性係数の組み合わせが [PP] から [EP] に変わったときの a 点の $\{\dot{p} \ \dot{\theta}\}^T$ ベクトルの変化の様相を図-1.31(a)に示す。また、図(b)に、a 点の $\{\dot{u}/a \cos \theta_J \ \dot{\theta}\}^T$ ベクトルの変化の様相を示す。

したがって、両ばねの状態点が塑性経路上にあるとき、比較ばねの剛性係数の組み合わせ [PP] を採用した剛性行列の最小固有値 ρ_1 が正であれば、[PP] のばね縮み速度の符号に応じて剛性係数を変更することによって、ばねの構成則に整合する剛性係数の組み合わせが得られる。

- 剛性係数の組み合わせ [PP] のばね縮み速度の符号に応じて剛性係数を変更したのでは、ばねの構成則に整合する剛性係数の組み合わせが得られず、構成則に矛盾する剛性係数の組み合わせが循環して選択される場合 < b 点の場合 > :

$\dot{e}_L > 0$ (負荷), $\dot{e}_R < 0$ (除荷) であるので、右ばねの剛性係数を弾性係数 E に変更し、剛性係数の組み合わせは [PE] となる。式(1.16)において $C_R = E$, $C_L = E^t$ とした剛性行列 $[K_{PE}]$ を用いて、次の方程式を解かなければならない。

$$[K_{PE}](\dot{D}) = \dot{p} \{G_J\} \quad (1.73)$$

ここに、

$$[K_{PE}] = \begin{bmatrix} E + E^t & (E - E^t) a \cos \theta_J \\ (E - E^t) a & (E + E^t) a^2 \cos \theta_J - p_J L \sec^2 \theta_J \end{bmatrix} \quad (1.74)$$

である。式(1.61a, b)の ρ_1, ρ_2 を用い、 $E - E^t = n$ とおいて式(1.74)を整理すると

$$[K_{PE}] = \begin{bmatrix} \rho_2 + n & n a \cos \theta_J \\ n a & \rho_1 + n a^2 \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1.75)$$

と書ける。＜a点の場合＞と同様、式(1.63)の行列 $[\Phi]$ を用いて座標変換を行ない、式(1.71)と同様な変位速度ベクトル $\{\dot{D}\}$ の表現を求めると次のようになる。

$$\{\dot{D}\} = \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \frac{\dot{p} \rho_1 \rho_2}{\det[K_{PE}]} \left\{ \left(\frac{g_{J1}}{\rho_1} + \frac{n(g_{J1} - a g_{J2})}{\rho_1 \rho_2} \right) \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} + \left(\frac{g_{J2}}{\rho_2} - \frac{n a \cos \theta_J (g_{J1} - a g_{J2})}{\rho_1 \rho_2} \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \right\} \quad (1.76)$$

このとき、 $\dot{p} > 0$ 、 $\det[K_{PE}] = \det[K_{EP}] > 0$ 、 $\rho_2 > 0 > \rho_1$ であり、整合剛性が得られるa点の場合と異なり、 ρ_1 は0に非常に近い負の値であることに注意しておかねばならない。また、 $n = E - E^t > 0$ および $g_{J1} > 0$ 、 $g_{J2} > 0$ である。式(1.76)の $\{ \}$ 内の固有ベクトル $\{\phi_1\} = \{0 \ 1\}^T$ および $\{\phi_2\} = \{1 \ 0\}^T$ に乘ずる係数の符号を調べる。

$\{\phi_1\}$ に乘ずる係数について：分母を $\rho_1 \rho_2$ に通分すると、分子は、

$$\rho_2 g_{J1} + n(g_{J1} - a g_{J2}) = (E + E^t)(L \tan \theta_J + \zeta) - (E - E^t)a$$

となる。 θ_J は図-1.27.3の曲線Iと曲線IIとの交点の θ 座標 θ_0 より左側にあり、

$$\tan \theta_J < \frac{E - E^t}{E + E^t} \frac{a}{L} - \frac{\zeta}{L}$$

であるから、 $\rho_2 g_{J1} + n(g_{J1} - a g_{J2}) < 0$ である。したがって、式(1.76)の $\{\phi_1\}$ に乘ずる $()$ 項は正であり、 $\dot{\theta}$ は負である。

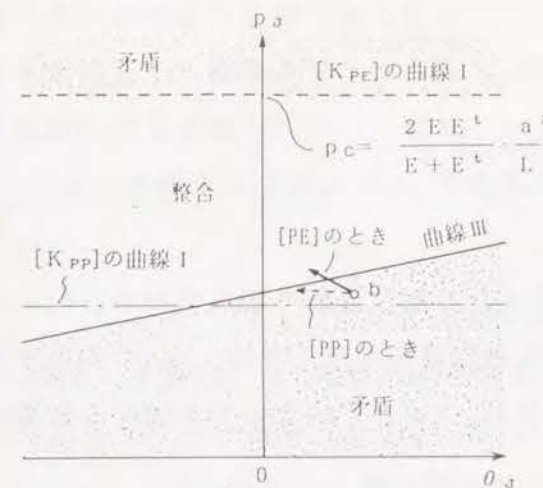
$\{\phi_2\}$ に乘ずる係数について：まず $g_{J1} - a g_{J2}$ の符号を調べる。

$$g_{J1} - a g_{J2} = L \tan \theta_J + \zeta - a$$

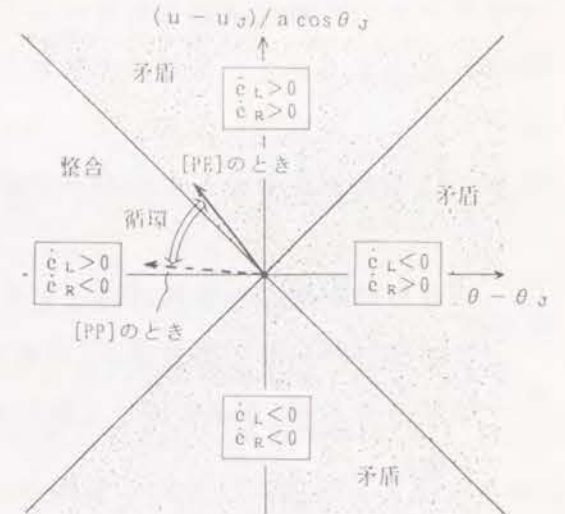
θ_J は図-1.27.3の $\theta^{(L)}$ より左側にあり、式(1.11b)より、

$$\tan \theta_J < \frac{a}{L} - \frac{\zeta}{L}$$

であるから、 $g_{J1} - a g_{J2} < 0$ である。 ρ_1 が負で0に非常に近い値であることを考慮すると、式(1.76)の $\{\phi_2\}$ に乘ずる $()$ 内の第2項が支配的となり、 $()$ 項は



(a) $\{\dot{p} \ \dot{\theta}\}^T$



(b) $\{\dot{u}/a \cos \theta_J \ \dot{\theta}\}^T$ と左右のばね速度の符号

図-1.32 b点($\rho_1 < 0$)における速度ベクトルの変化の様相
—— 剛性係数の組み合わせ[PE]

負となる。したがって、 \dot{u} は正である。

また、ばねの縮み速度 $\{\dot{e}\}$ は式(1.60)より次のように書ける。

$$\{\dot{e}\} = \begin{Bmatrix} \dot{e}_L \\ \dot{e}_R \end{Bmatrix} = \frac{\dot{p} \rho_1 \rho_2}{\det[K_{PE}]} \left\{ \begin{aligned} & - \left(\frac{g_{J1}}{\rho_1} + \frac{2n(g_{J1} - a g_{J2})}{\rho_1 \rho_2} \right) a \cos \theta_J + \frac{g_{J2}}{\rho_2} \\ & \frac{g_{J1}}{\rho_1} a \cos \theta_J + \frac{g_{J2}}{\rho_2} \end{aligned} \right\} \quad (1.77)$$

上式において、 \dot{e}_R の $\{ \}$ 内の表現は式(1.66)の[PP]のときと同じである。ただし、 $\{ \}$ 項の前に $\rho_1 \rho_2 (< 0)$ が乘じられるので、[PP]のとき \dot{e}_R は負(除荷)であったが、剛性係数の組み合わせ[PE]では \dot{e}_R は正(負荷)となる。一方、 \dot{e}_L の $\{ \}$ 内の $a \cos \theta_J$ に乘じられる $()$ 項は前述の $\{\phi_1\}$ に乘ずる係数の符号の検討から正であり、 ρ_1 が負で0に非常に近い値であることを考慮すると、 $\dot{e}_L > 0$ (負荷)である。

式(1.77)の[PE]のばねの縮み速度に応じて、剛性係数を変更すると再び[PP]の組み合わせを選択することになり、循環過程に陥る。図-1.32(a)に、剛性係数の組み合わせが[PP]から[PE]に変わったときのb点の $\{\dot{p} \ \dot{\theta}\}^T$ ベクトルの変化の様相を示す。

また、図(b)に、a点の $\{\dot{u}/a \cos \theta_J \ \dot{\theta}\}^T$ ベクトルの変化の様相を示す。

したがって、両ばねの状態点が塑性経路上にあるとき、比較ばねの剛性係数の組み

合わせ[PP]を採用した剛性行列の最小固有値 ρ_1 が負になると、[PP]のばね縮み速度の符号に応じて剛性係数を変更することでは、ばねの構成則に整合する剛性係数の組み合わせは得られず、構成則に矛盾する剛性係数の組み合わせを循環して選択する過程に陥ることになる。なお、ここでの考察は、 θ_J が図-1.27.3の剛性係数の組み合わせ[PP]における曲線Iと曲線IIとの交点の θ 座標 θ_0 より左側にある場合である。

◎ 両ばねの状態点が塑性経路上にあり、比較ばねの剛性係数の組み合わせ[PP]による剛性行列の最小固有値 ρ_1 が負で循環剛性選択過程に陥るとき、 ρ_1 に対応する固有ベクトル $\{\phi_1\}$ を用いて剛性係数を変更し、 $\{\phi_1\}$ を代表する $\dot{\theta}$ 成分を制御する場合：

ρ_1 に対応する固有ベクトル $\{\phi_1\}$ は式(1.62)より、 $\{\phi_1\} = \{0 \ 1\}^T$ である。式(1.58)から ρ_1 が0近傍であれば、 $\{\phi_1\}$ によって表わされる変形速度モードが次の増分変形を支配するモードであると予測される。固有ベクトルそのものは正規化されているので、 $+\{\phi_1\}$ および $-\{\phi_1\}$ について検討してみる必要がある。

図-1.33に、 $(u - u_J)/a \cos \theta_J - (\theta - \theta_J)$ 平面上に $+\{\phi_1\}$ 、 $-\{\phi_1\}$ を示す。

まず $+\{\phi_1\}$ を用いて剛性係数を変更してみる。このとき、ばねの縮み速度は、図-1.33より $\dot{e}_L < 0$ (除荷)、 $\dot{e}_R > 0$ (負荷)である。これを式(1.59)で表わすと、

$$\begin{Bmatrix} \dot{e}_L \\ \dot{e}_R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -a \cos \theta_J \\ 1 & a \cos \theta_J \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (1.78)$$

である。したがって、ばねの剛性係数の組み合わせは[EP]が選ばれる。解くべき方程式は、整合剛性となる<a点の場合>の式(1.67)となる。ここで制御変数を θ とし、 $+\{\phi_1\}$ の $\dot{\theta}$ 成分の符号方向に制御してみる。すなわち、

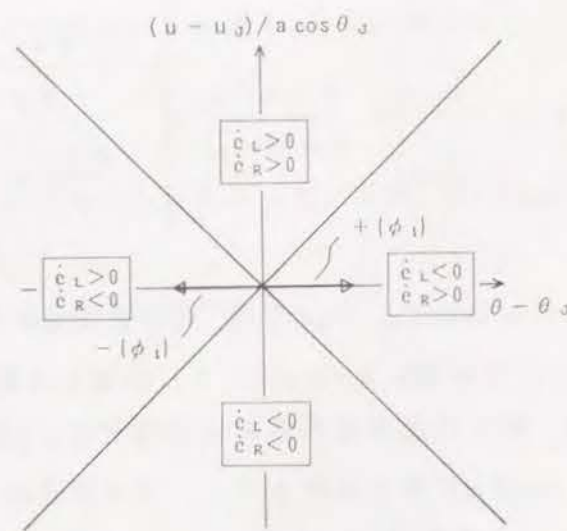


図-1.33 固有値 ρ_1 に対応する固有ベクトル $\{\phi_1\}$ と左右のばね速度の符号

$\dot{\theta} = 1$ として、式(1.67)から、 \dot{u} および \dot{p} を求める。その結果、

$$\dot{u} = \frac{\rho_1 \rho_2}{R} \left(\frac{g_{J2}}{\rho_2} + \frac{n a \cos \theta_J (g_{J1} + a g_{J2})}{\rho_1 \rho_2} \right) \quad (1.79a)$$

$$\dot{p} = \frac{\rho_1 \rho_2}{g_{J2} R} \left(\frac{n a \cos \theta_J}{\rho_1} + \frac{n}{\rho_2} + 1 \right) \quad (1.79b)$$

ここに、

$$R = (\rho_2 + n) g_{J1} + n a g_{J2} \quad (1.79c)$$

となる。b点で、 ρ_1 は0に非常に近い負の値である。他の変数はすべて正である。 ρ_1 が分母にある項が支配的となるので、 \dot{u} も \dot{p} も正である。 \dot{u} を表わす式(1.79a)の()内と同じ表現が、整合剛性となる<a点の場合>の式(1.71)の \dot{u} に関する項に見られる。

次に、ばねの縮み速度 $\{\dot{e}\}$ を式(1.60)より求めると、

$$\{\dot{e}\} = \begin{Bmatrix} \dot{e}_L \\ \dot{e}_R \end{Bmatrix} = \frac{\rho_1 \rho_2}{R} \begin{Bmatrix} -\frac{g_{J1}}{\rho_1} a \cos \theta_J + \frac{g_{J2}}{\rho_2} \\ \left(\frac{g_{J1}}{\rho_1} + \frac{2n(g_{J1} + a g_{J2})}{\rho_1 \rho_2} \right) a \cos \theta_J + \frac{g_{J2}}{\rho_2} \end{Bmatrix} \quad (1.80)$$

となる。剛性係数の組み合わせ[EP]を採用した場合の $\{\dot{e}\}$ を表わす式(1.72)では、ベクトルに乗ずる係数は $\dot{p} \rho_1 \rho_2 / \det[K_{EP}]$ であるが、ここでは $\rho_1 \rho_2 / R$ である。この係数の違いと ρ_1 が負の値であることを除けば、式(1.80)は式(1.72)と同じ表現である。式(1.80)より、 $\dot{e}_L < 0$ (除荷)、 $\dot{e}_R > 0$ (負荷)であり、 $+\{\phi_1\}$ を用いて設定したばねの剛性係数の組み合わせ[EP]とばねの縮み速度の符号は整合している。

$-\{\phi_1\}$ を用いて剛性係数を変更してみる。このとき、ばねの縮み速度は図-1.33より $\dot{e}_L > 0$ (負荷)、 $\dot{e}_R < 0$ (除荷)となり、ばねの剛性係数の組み合わせは[PE]が選ばれる。解くべき方程式は<b点の場合>の式(1.74)となる。ここで制御変数を θ とし、 $-\{\phi_1\}$ の $\dot{\theta}$ 成分の符号方向に制御してみる。すなわち、 $\dot{\theta} = -1$ として \dot{u} および \dot{p} を求めることになる。式(1.74)を解いた前述の考察において、 $\dot{\theta}$ が負となることから、この試行で得られるばねの縮み速度の符号と $-\{\phi_1\}$ を用いて設定した剛性係数の組み合わせ[PE]が矛盾することは明らかである。

したがって、 $+\{\phi_1\}$ を用いてばねの剛性係数の組み合わせを設定し、 $\{\phi_1\}$ を代表する $\dot{\theta}$ 成分を制御すれば、整合解を得ることができる。

ここでの考察によって、固有値 ρ_1 が 0 に非常に近い値である場合に、その固有値 ρ_1 に対応する固有ベクトル $\{\phi_1\}$ で表わされるモードがばねの縮み速度の符号の決定に支配的であることが示された。また、 ρ_1 が負で非常に 0 に近い値である場合に、循環剛性選択過程に陥ることが示された。さらに、 $\{\phi_1\}$ を用いてばねの剛性係数の組み合わせを設定することによって整合解を得られることが、前節までの検討に加えて、改めて固有値を利用して提示された。

剛性行列 $[K]$ が正定値でなくなった場合、その剛性行列を用いて算定された変位速度ベクトルの向きは、整合解となる正定値の剛性行列による変位速度ベクトルの向きと $\dot{\theta}$ に関して逆になっている。このことが、そのまま解析を続行した場合に循環剛性選択過程に陥る要因であると考えられる。したがって、変位速度ベクトルの向きを逆転させる原因となる剛性行列の固有値 ρ_1 の符号の変化に着目し、固有値が 0 または負になった場合にその固有値に対応する固有ベクトル $\{\phi_1\}$ によって誘発される 2 つの変形モード $+\{\phi_1\}$ および $-\{\phi_1\}$ のどちらかが整合剛性行列によって得られる変位速度ベクトルに近い向きをもつと予想することは妥当であろう。

1.7.2 整合剛性選択手順

以上の考察と前節までの検討から、図-1.1の剛体-ばね柱モデルの剛性選択過程は、比較ばねの剛性行列 $[K]$ の最小固有値 ρ_1 の符号によって次の 3 つの場合に分類できる：

- [CASE 1] $\rho_1 > 0$ すなわち $[K]$ が正定値であれば、ばねの縮み速度に応じて剛性係数を変更することによって、構成則に整合する剛性係数の組み合わせを選択することができる。
- [CASE 2] ばねの縮み速度に応じて剛性係数を変更する手順で循環剛性選択過程に陥る場合には、 $\rho_1 \leq 0$ であり $[K]$ は正定値でない。
- [CASE 3] $\rho_1 \leq 0$ すなわち $[K]$ が正定値でない場合にも、構成則に整合する剛性係数の組み合わせを選択することができる場合がある。

この分類の説明的な図を描くと、図-1.34 のようになる。[CASE 2] および [CASE 3] の正定値でない剛性行列を用いて算定される変位速度ベクトルの向きは、整合解となる

正定値の剛性行列による変位速度ベクトルの向きと剛体部の回転角に関して逆になる。正定値でない剛性行列に適合する経路で許容される経路は、不整合が全くない完全系の塑性分岐点を通る基本釣合経路のみである。

したがって、解析上問題となるのは、[CASE 2] および [CASE 3] の比較ばねの剛性行列 $[K]$ が正定値でなくなる場合である。これまでの検討から、 $[K]$ が正定値でなくなったときの整合剛性選択手順として以下の手順を提案する：

- (STEP 1) 変位速度ベクトル $\{\dot{D}\}$ として、負または 0 の固有値 ρ_1 に対応する固有ベクトル $\{\phi_1\}$ を採用する。必ず $+\{\phi_1\}$ および $-\{\phi_1\}$ の両方について行なう。
- (STEP 2) $\{\dot{D}\}$ に適合するばね縮み速度 $\dot{e}_{L,R}$ を式(1.12)より算定する。
- (STEP 3) $\dot{e}_{L,R}$ に対応する剛性係数 $C_{L,R}$ を選択する。
- (STEP 4) $\{\phi_1\}$ の非 0 成分のうちそのモードを代表する変数を制御変数として選択し、 $\{\dot{D}\}$ のその制御変数成分に制御方向に対応する符号をもつ適当な指定値を代入し、系方程式を解いてもう一つの変位速度成分と荷重速度を求める。
- (STEP 5) ばね縮み速度 $\dot{e}_{L,R}$ を算定し、その符号と (STEP 3) で選択した $C_{L,R}$ との整合性を調べる。

その結果、

- i) 循環剛性選択過程 (I) に陥る場合は、 $+\{\phi_1\}$ あるいは $-\{\phi_1\}$ のどちらか 1 つについて、式(1.15)の p の制御方向にばねの縮み速度と剛性係数が整合する解を得る。
- ii) 循環剛性選択過程 (II) に陥る場合は、 $+\{\phi_1\}$ および $-\{\phi_1\}$ の 2 つについて、式(1.15)の p の制御方向とは逆方向に、ばねの縮み速度と剛性係数が整合する解を得る。
- iii) 塑性分岐の場合は、 $+\{\phi_1\}$ および $-\{\phi_1\}$ の 2 つについて、式(1.15)の p の制

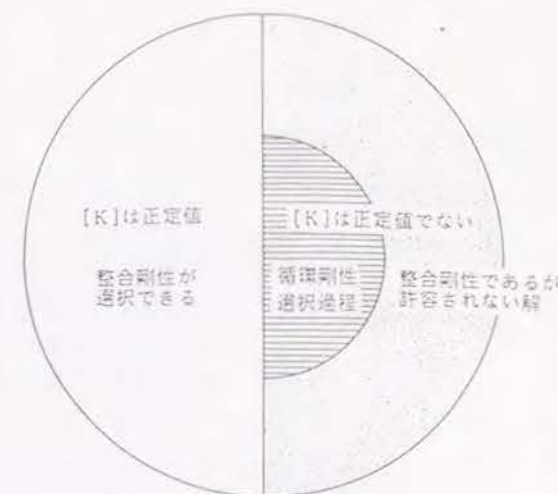


図-1.34 比較ばねの剛性行列 $[K]$ の正定値性と剛性選択過程の性質

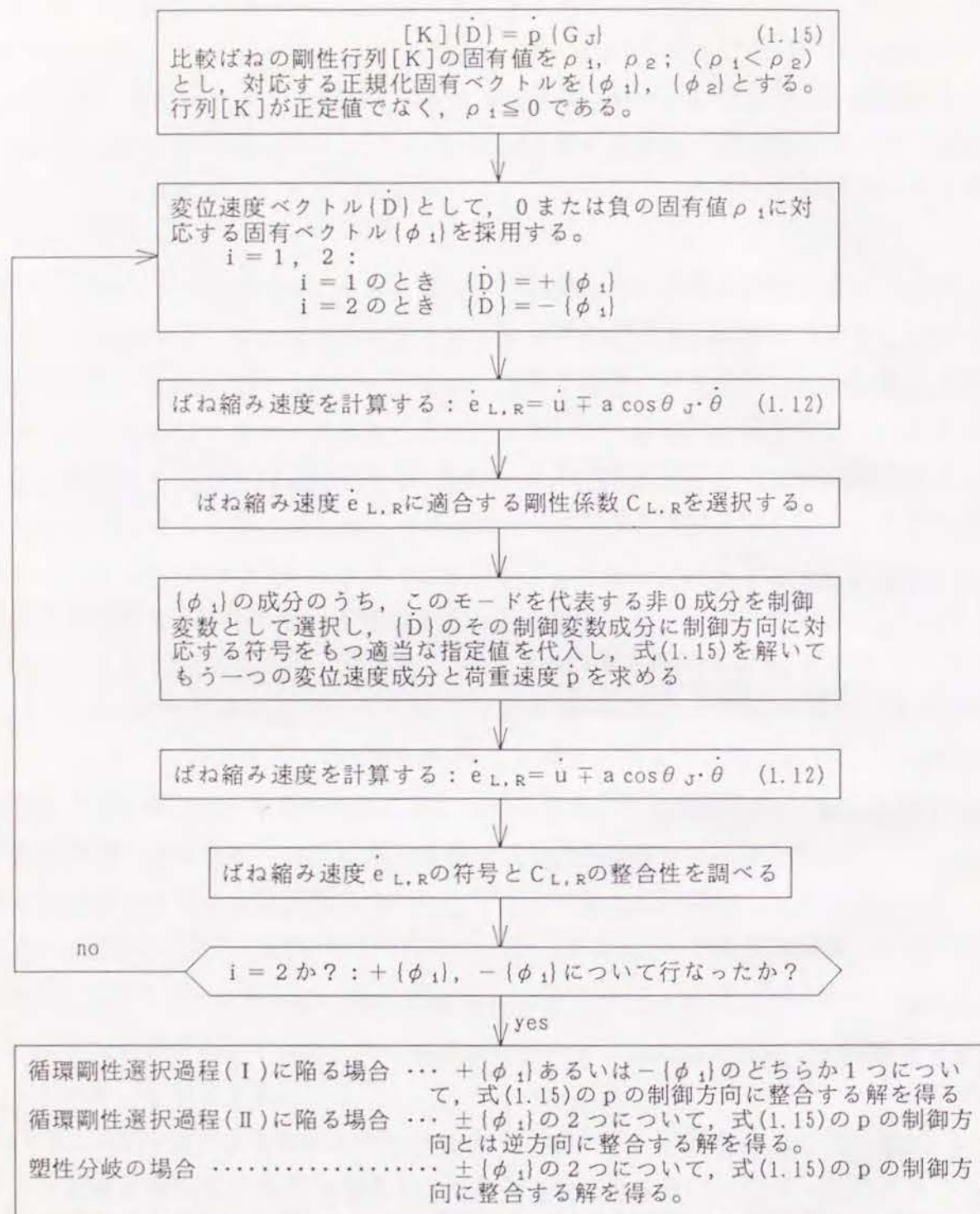


図-1.35 比較ばねの剛性行列が正定値でなくなったときの整合剛性選択手順

御方向にばねの縮み速度と剛性係数が整合する解を得る。
となる。以上の手順を図-1.35に示す。

もう一つの固有値 ρ_2 も負となる場合は、 ρ_2 に対応する固有ベクトル $\{\phi_2\}$ についても上記の手順を行なえばよい。その結果、 $\pm\{\phi_2\}$ についてii)と同様の整合解を得る。なお、この手順では整合解を得るために、制御変数を変更している。したがって、解析目的に照らして不自然となる場合もあるので、その後の解析を続行する場合には注意を要する。

1.8 まとめ

本章では、有限要素などによって離散化された構造物モデルの材料非線形性を伴う解析において、ある増分ステップで全ての要素のひずみ速度の符号と構成則に関して整合する要素剛性係数の組み合わせを見出す整合剛性選択問題を論理的に検討するために、バイリニア力-縮み関係に従う2つのばねで支えられた剛体-ばね柱モデルの解析を行なった。このモデルにおいて、複数のばね剛性係数の組み合わせを循環して選択し、整合する剛性係数の組み合わせが決定できない循環剛性選択過程のメカニズムを明らかにし、循環剛性選択過程に陥らず、合理的に整合する剛性係数の組み合わせを選択する手順を提案した。本章で得られた知見ならびに成果を以下にまとめる：

- (1) 制御変数の速度を正負両方向に考えるならば、ばねの縮み速度と整合する剛性係数の組み合わせは必ず存在する。このことは、ばねの力-縮み関係における塑性剛性係数の正負、制御変数の選択に関わらない。
- (2) 制御変数の速度方向を規定すると、循環剛性選択過程に陥る可能性がある。循環剛性選択過程には、次の2つの種類がある；

循環剛性選択過程(I)・・・規定した制御変数の速度方向に整合する剛性係数の組み合わせは存在するが、各ばねの縮み速度に応じて、そのばねの剛性係数を変更する方法では、整合剛性を見つけることができない過程

循環剛性選択過程(II)・・・規定した制御変数の速度方向に整合する剛性係数の組み合わせが全くない過程

(3) 剛性選択過程は、比較ばねの剛性行列の正定値性から次の3つの場合に分類できる：

[CASE 1] 比較ばねの剛性行列が正定値であれば、ばねの縮み速度に応じて剛性係数を変更することによって、構成則に整合する剛性係数の組み合わせを選択することができる。

[CASE 2] ばねの縮み速度に応じて剛性係数を変更する手順で循環剛性選択過程に陥る場合には、比較ばねの剛性行列は正定値でない。

[CASE 3] 比較ばねの剛性行列が正定値でない場合にも、構成則に整合する剛性係数の組み合わせを選択することができる場合がある。

(4) [CASE 2]および[CASE 3]では、正定値でない剛性行列を用いて算定された変位速度ベクトルの向きは、構成則に整合する剛性係数の組み合わせを選択した場合の正定値の剛性行列による変位速度ベクトルの向きと剛体部の回転角に関して逆になる。

(5) [CASE 3]の正定値でない剛性行列に適合する釣合経路のうち許容される経路は、不整が全くない完全系の塑性分岐点を通る経路のみである。

(6) 剛性行列が正定値でなくなったとき、その剛性行列の負または0の固有値に対応する固有ベクトルを用いてばねの縮み速度を算定し、それに対応する剛性係数を選択した後、制御変数を固有ベクトルの非0成分に変更して解析を行えば、整合する解が必ず得られる。したがって、この方法を用いると循環剛性選択過程には陥らない。また塑性分岐点の極近傍では一対の分岐経路を得ることができる。

(7) ばねの塑性剛性係数が正であるとき、増分解がばね縮みの除荷開始点を捉えられない場合に、循環剛性選択過程(I)に陥る可能性がある。このことは、骨組の弾塑性解析において材料の応力ひずみ関係における除荷開始点を正確に予測することができる増分摂動法を使用すれば、循環剛性選択過程に陥ることが極めて少なくなるという本研究の経験に対して合理的な説明を与えるものである。

(8) 塑性分岐点近傍では、増分摂動法を用いて増分解に含まれる誤差を小さくする努力を払っても、極めて小さな数値誤差のために循環剛性選択過程に陥る可能性を否定することはできない。それゆえ、(6)のような手順を解析法に組み込んでおくことは解析を確実に遂行するためには不可欠である。

2. 1 序

従来の骨組の複合非線形解析法は、増分刻み幅の設定に合理的な規範がなく使用者が何らかの判断によって刻み幅を設定しなければならないという問題点、および材料の非線形性や除荷の取り扱い法に関して論理的整合性がないという問題点を抱えている。このため比較的ゆるやかに変化して極限点を通るような釣合経路を追跡する解析は制御パラメーターを適切に選ぶ方法で容易に行なえるが、釣合経路の進行方向が急変し、それに伴う材料履歴の扱いを厳密に行なわなければ、その後の予測釣合経路の信頼性が著しく低下するような分岐点あるいはその近傍を通る挙動を追跡することは、従来の複合非線形解析法にとって極めて困難な問題であった。

弾塑性材料の応力ひずみ経路上における除荷開始点の予測を含めて、数値モデルとしての構成則を正確に追跡するという問題は、1972年に上谷が、既知の状態を基準として塑性法則を時間パラメーターに関して摂動展開するというアイデアで解決し[2]、中村・上谷らによって増分摂動法という名称で提案されている[1~4]。この増分摂動法を用いると、増分刻み幅(増分長)の決定は自動化され、かつ解析精度も制御することができ、前述の2つの問題点は、根本的に解消できる。なお、塑性法則を摂動展開するという手法は、1973年にHutchinsonによっても独立に提案され、弾塑性分岐問題に用いられている[25]。

本章では、弾塑性骨組の臨界挙動予測解析法の提示という本研究の目的から、大たわみでの精度を確保すること、実用規模の骨組の解析が可能であることという2つの留意点に配慮し、一次元有限要素を用いた増分摂動法の定式化過程を述べる。2つの留意点は、0.4節に述べたように、まさに0.3節で述べた中村・石田の弾塑性骨組の大たわみ解析法[5~9]の2大特徴である要素における剛体運動座標(移動座標)の採用による精度の確保と伝達行列法による系方程式の元数の低減という利点を活かすことによって解決され得る。したがって、増分摂動法でもそれらの利点が保持されるよう定式化の工夫を行なっている。また、第1章で得られた整合剛性選択問題の検討で得られた知見を基に、整合剛性選択アルゴリズムを作成している。

2.2 要素摂動方程式の誘導

2.2.1 有限要素と座標系の設定

平面骨組の面内挙動を扱うものとし、面外変形等は考慮しない。平面保持を仮定し、部材のせん断変形は無視する。部材は材軸方向に直列に並ぶ n (≥ 1) 個の「単純梁型要素」(図-2.1, 2.2) によって構成されていると考える。部材の要素への分割は、部材軸方向のひずみの進展に伴って自動的に行なわれる。解析開始時には、1 部材は「母要素」と呼ばれる 1 要素で構成され、ひずみの進展に伴って母要素の両端から予

め設定された要素長(基本要素長と呼ぶ)をもつ「子要素」に分割される。また、各有限要素の断面は断面性能を近似するように分割された断面積を集中して付与した m (≥ 2) 個の材料点からなると考える。 $m=2$ の場合は、しばしば等価サンドイッチ断面と呼ばれる。材料点を材軸方向に連ねた線分を「材料線要素」と呼ぶ。サンドイッチ断面のときは「フランジ要素」と呼ばれることもある。材料線要素の降伏および除荷は、例えば、その材料線要素のひずみの中央値をもとに判定される。材軸方向の弾塑性境界は要素端のみに生じるものとする。部材のモデル化と要素座標枠を図-2.1 に、また、要素基準座標と要素局所座標(単純梁型移動座標)との関係を図-2.2 に示す。

図-2.2において $U_a, V_a, \theta_a, U_b, V_b$ および θ_b は基準座標

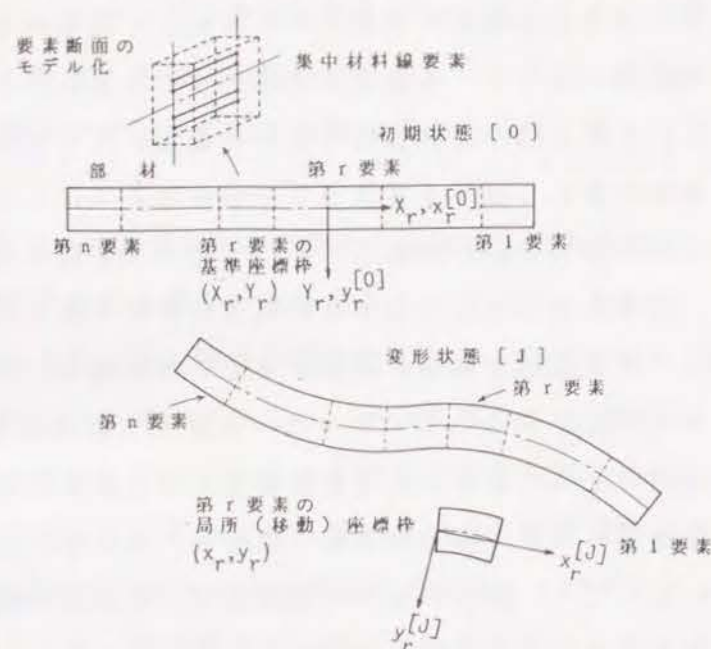


図-2.1 部材のモデル化と要素座標枠

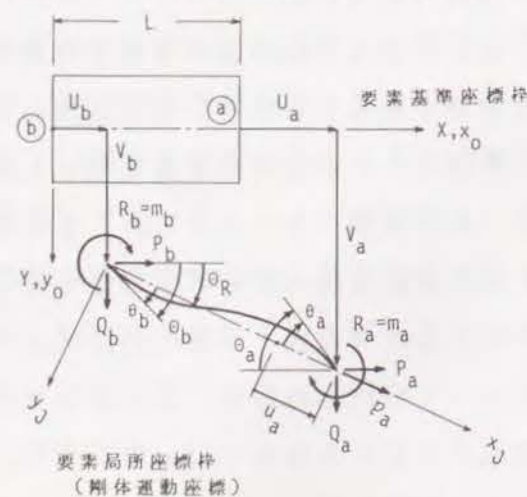


図-2.2 要素基準座標と要素局所座標

での a, b 両端での要素端変位であり、以下まとめて表わす場合には $\{D\}$ を用いる。

一方、 u_a, θ_b, θ_a は正味の変形を表わすのに必要な局所座標変位であり、 $\{d\}$ で表わされる。また、 P_a, Q_a, R_a, P_b, Q_b および R_b は、基準座標での要素端力であり、 $\{P\}$ で表わされる。一方、 p_a, m_b, m_a は $\{d\}$ に対応する独立な局所座標力であり、 $\{p\}$ で表わされる。なお、 L は変形前の要素長である。

2.2.2 有限要素基礎式の数値表示

変形前の要素材軸上の x 点の局所座標枠における x 方向、 y 方向および回転方向変位成分をそれぞれ $u(x), v(x), \theta(x)$ で表記する。 x 方向変位、 y 方向変位をそれぞれ x の 1 次式、3 次式で表わす慣用の変位関数を採用し、単純梁としての境界条件を考慮すると、次のように 3 つの係数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ で表わすことができる。

$$\begin{Bmatrix} u(x) \\ v(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x - x^3/L^2 & x^2 - x^3/L \\ 0 & 1 - 3x^2/L^2 & 2x - 3x^2/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

$\{u(L) \theta(0) \theta(L)\}^T = \{u_a \theta_b \theta_a\}^T \equiv \{d\}$ であるから、局所座標変位ベクトル $\{d\}$ を変位関数の未定係数ベクトル $\{\alpha\}$ で表わすと、

$$\{d\} = [\Gamma] \{\alpha\} \quad (2.2)$$

ここに、

$$[\Gamma] = \begin{bmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -L \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

となる。 $\{\alpha\}$ を $\{d\}$ で表わし、その速度表示を書くと、

$$\{\dot{\alpha}\} = [\Gamma]^{-1} \{\dot{d}\} \quad (2.4)$$

ここに、

$$[\Gamma]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/L & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2/L & -1/L \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

である。

ひずみ変位関係式は、移動座標の採用と、材料非線形性への対処から分割後の子要素長が十分短くかつ母要素も含めて各要素の変形そのものが小さいとして、微小変形に関するものを採用する(15), (16)。材軸からの距離が y_j である第 j 番目の材料線要素の伸びひずみ $e(x, y_j)$ は、

$$e(x, y_j) = \frac{du(x)}{dx} - y_j \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = \{b_j\}^T \{\alpha\} \quad (2.6)$$

ここに、

$$\{b_j\} = \left\{1 - 6\frac{x}{L^2}y_j - (2-6\frac{x}{L})y_j\right\}^T \quad (2.7)$$

と書ける。また、その速度表示は次のようになる。

$$\dot{e}(x, y_j) = \{b_j\}^T \{\dot{\alpha}\} \quad (2.8)$$

次に、要素の第 j 番目の材料線要素に属する集中断面積を a_j とし、要素局所座標枠での速度型仮想仕事式を書くと、

$$\{\delta d\}^T \{\dot{p}\} = \sum_{j=1}^m a_j \int_0^L \dot{\sigma}(x, y_j) \delta e(x, y_j) dx \quad (2.9)$$

となる。また、各材料線要素の応力ひずみ関係式の速度表示は、

$$\dot{\sigma}(x, y_j) = E_T(y_j) \dot{e}(x, y_j) \quad (2.10)$$

と書ける。ここに、 $E_T(y_j)$ は、それまでのひずみ経路とひずみ速度の符号によって決まる係数である。

式(2.2)および(2.6)を式(2.9)に代入し、 $\{\delta d\}$ の各々が独立であることに着目すると、要素局所座標における速度型つり合い式が次のように導かれる。

$$\{\dot{p}\} = \sum_{j=1}^m a_j \int_0^L \{B_j\} \dot{\sigma}(x, y_j) dx \quad (2.11)$$

ここに、

$$\{B_j\} = ([\Gamma]^{-1})^T \{b_j\} \quad (2.12)$$

である。

なお、この $\{B_j\}$ を用いると、式(2.8)のひずみ速度—局所座標変位速度関係式は次のように書ける。

$$\dot{e}(x, y_j) = \{B_j\}^T \{\dot{d}\} \quad (2.13)$$

要素局所座標と要素基準座標の要素端変位および要素端力の速度量は、文献[5~9]と同様、要素拡大回転行列 $[T]$ を介して次式で関係づけられる。

$$\{\dot{d}\} = [T] \{\dot{D}\} \quad (2.14)$$

$$\{\dot{P}\} = [T]^T \{\dot{p}\} + [\dot{T}]^T \{p\} \quad (2.15)$$

ここで、

$$[T] = \begin{bmatrix} c & s & 0 & -c & -s & 0 \\ s/\ell & -c/\ell & 0 & -s/\ell & c/\ell & 1 \\ s/\ell & -c/\ell & 1 & -s/\ell & c/\ell & 0 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$c = \cos \Theta_R, \quad s = \sin \Theta_R, \quad \ell = L + u_a \quad (2.17a-c)$$

であり、 Θ_R は要素剛体回転角と呼ばれ、図-2.2の幾何学的関係から次式で表わされる。

$$\Theta_R = \sin^{-1} \frac{V_a - V_b}{L + u_a} \quad \text{あるいは} \quad \sin \Theta_R = \frac{V_a - V_b}{L + u_a} \quad (2.18)$$

式(2.18)および

$$L + u_a = (U_a - U_b + L) \cos \Theta_R + (V_a - V_b) \sin \Theta_R \quad (2.19)$$

をそれぞれ速度表示し、2つの式から \dot{u}_a を消去すると、次の $\dot{\Theta}_R$ と要素基準座標変位との速度関係式が得られる。

$$\dot{\Theta}_R = \{R\}^T \{\dot{D}\} \quad (2.20)$$

ここに、

$$\{R\} = \frac{1}{\ell} \{-s \quad c \quad 0 \quad s \quad -c \quad 0\}^T \quad (2.21)$$

である。

式(2.11)を式(2.15)に代入すると、次の基準座標での速度型つり合い式を得る。

$$\{\dot{P}\} = [T]^T \left\{ \sum_{j=1}^m a_j \int_0^L \{B_j\} \dot{\sigma}(x, y_j) dx \right\} + [\dot{T}]^T \{p\} \quad (2.22)$$

2.2.3 状態変数の摂動展開

文献[1~4]に従って、すべての状態変数を既知の $[J]$ 状態で次のように摂動展開する。以下、 t は変形を記述するためのパラメータで、 $[J]$ 状態で $t=0$ であり、

$0 \leq t \leq t_{cr}$ の区間で、すべての状態変数は t に関して解析的一価関数であるとする。
 t_{cr} の決定方法については2.4節で述べるが、 t_{cr} は解析的一価性が犯される条件
 が発生する区間以下に採られるものとする。以下、 $\{D^{(0)}\}$ 、 $\{P^{(0)}\}$ 等は $[J]$
 状態の既知量を表わす。

(要素基準座標に関する状態変数)

$$\{D(t)\} = \sum_{M=0}^{\infty} \{D^{(M)}\} t^M, \quad \{P(t)\} = \sum_{M=0}^{\infty} \{P^{(M)}\} t^M \quad (2.23a, b)$$

(要素局所座標に関する状態変数)

$$\{d(t)\} = \sum_{M=0}^{\infty} \{d^{(M)}\} t^M, \quad \{p(t)\} = \sum_{M=0}^{\infty} \{p^{(M)}\} t^M \quad (2.23c, d)$$

(応力ひずみ関係に関する状態変数)

$$\sigma_j(t) = \sum_{M=0}^{\infty} \sigma_j^{(M)} t^M, \quad e_j(t) = \sum_{M=0}^{\infty} e_j^{(M)} t^M \quad (2.23e, f)$$

ここに、 σ_j 、 e_j は $\sigma(x, y_j)$ 、 $e(x, y_j)$ を略記したものである。式(2.10)で応力
 とひずみを関係づける係数 $E_T(y_j)$ は、要素材料の履歴モデルに応じて摂動展開され
 る。特に、曲線形の応力ひずみ関係を採用する場合には、線形増分型の解析法におけ
 る線形近似に比して格段に精確な扱いが可能となる[1~4]。ここでは、本解析法が実
 用規模骨組の解析を目的としていることから、計算効率を考慮して、区分線形化され
 た応力ひずみ関係モデルを対象として定式化を示す。この場合には、 $0 \leq t \leq t_{cr}$
 の区間で $E_T(y_j)$ の1次以上の摂動係数は0である。

(要素基準座標と要素局所座標を関係づける状態変数)

$$[T(t)] = \sum_{M=0}^{\infty} [T^{(M)}] t^M, \quad \Theta_R(t) = \sum_{M=0}^{\infty} \Theta_R^{(M)} t^M, \quad \{R(t)\} = \sum_{M=0}^{\infty} \{R^{(M)}\} t^M \quad (2.24a-c)$$

要素拡大回転行列 $[T]$ は要素剛体回転角 Θ_R と局所座標変位 u_a の関数であるので、
 その展開式の係数行列は次のように書き表わされる。

$$[T^{(0)}] = [T(\Theta_R^{(0)}, u_a^{(0)})]$$

$$[T^{(1)}] = \left(\frac{\partial}{\partial \Theta_R} [T] \right) \Theta_R^{(1)} + \left(\frac{\partial}{\partial u_a} [T] \right) u_a^{(1)}$$

$$[T^{(2)}] = \left(\frac{\partial}{\partial \Theta_R} [T] \right) \Theta_R^{(2)} + \left(\frac{\partial}{\partial u_a} [T] \right) u_a^{(2)} \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \Theta_R^2} [T] \right) \Theta_R^{(1)} \cdot \Theta_R^{(1)} + \left(\frac{\partial^2}{\partial \Theta_R \partial u_a} [T] \right) \Theta_R^{(1)} \cdot u_a^{(1)} \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial u_a^2} [T] \right) u_a^{(1)} \cdot u_a^{(1)} \\ \dots \dots \dots$$

すなわち、

$$[T^{(0)}] = [T(\Theta_R^{(0)}, u_a^{(0)})]$$

$$[T^{(M)}] = [T, \Theta_R] \Theta_R^{(M)} + [T, u_a] u_a^{(M)} + [\hat{T}^{(M)}] \quad (M=1, 2, \dots) \quad (2.25)$$

と書ける。ここに、表記法 $[T, v]$ は、 $[T]$ の v に関する1次偏導関数行列を表わし
 ている。 $[\hat{T}^{(M)}]$ は $(M-1)$ 次以下の摂動係数だけで計算できる項をまとめたものである
 なお $[\hat{T}^{(1)}] = [0]$ である。また、 $[T^{(M)}]$ に含まれる $[T]$ の Θ_R 、 u_a に関する高次の
 偏導関数行列は、2次までの偏導関数行列を記憶しておけば、それらを利用して容易
 に計算される。式(2.24c)の $\{R\}$ も Θ_R と u_a の関数であり、その展開式の係数行列
 も同様に書き表わすことができる。 $\{R^{(M)}\}$ の1次以上の摂動係数ベクトルは、式
 (2.16)と式(2.21)を比較するとわかるように、同次の $[T^{(M)}]$ の第2行あるいは第3
 行の符号を換えたものに等しい。

式(2.23a-f)、(2.24a,b)を t で微分し、それぞれの変数の速度量を表わすと、

$$\{\dot{D}(t)\} = \sum_{M=1}^{\infty} M \{D^{(M)}\} t^{M-1}, \quad \{\dot{P}(t)\} = \sum_{M=1}^{\infty} M \{P^{(M)}\} t^{M-1},$$

$$\{\dot{d}(t)\} = \sum_{M=1}^{\infty} M \{d^{(M)}\} t^{M-1}, \quad \{\dot{p}(t)\} = \sum_{M=1}^{\infty} M \{p^{(M)}\} t^{M-1},$$

$$\dot{\sigma}_j(t) = \sum_{M=1}^{\infty} M \sigma_j^{(M)} t^{M-1}, \quad \dot{e}_j(t) = \sum_{M=1}^{\infty} M e_j^{(M)} t^{M-1},$$

$$\dot{\Theta}_R(t) = \sum_{M=1}^{\infty} M \Theta_R^{(M)} t^{M-1}, \quad [\dot{T}(t)] = \sum_{M=1}^{\infty} M [T^{(M)}] t^{M-1} \quad (2.26a-h)$$

となる。

ここでは、移動座標の採用のため、式(2.23)に見られるように二つの座標それぞれでの状態変数の摂動展開と、式(2.24)の座標変換に関する状態変数の摂動展開が必要となる。しかし、その摂動演算は上述したように周期関数の特性を活かせば、比較的容易なものとなる。さらに、移動座標の採用により、式(2.6)の線形ひずみ変位関係式を用いているので、ひずみ速度と変位速度を関係づけるベクトル $\{B_J\}^T$ は状態変数を含まず、摂動展開する必要がない。

2.2.4 摂動係数関係式と要素摂動方程式

式(2.23)、(2.24)および(2.26)の状態変数の関係を与える基礎式は、2.2.2項の

(材料線要素の応力速度-ひずみ速度関係式) 式(2.10)

(要素局所座標における速度型つり合い式) 式(2.11)

(ひずみ速度-要素局所座標変位速度関係式) 式(2.13)

(要素局所座標変位速度-要素基準座標変位速度関係式) 式(2.14)

(要素剛体回転角速度-要素基準座標変位速度関係式) 式(2.20)

(要素基準座標における速度型つり合い式) 式(2.22)

である。これらの基礎式は区間 $0 \leq t \leq t_{cr}$ のあらゆる時刻において成立しなければならない。これらの式に、式(2.23)、(2.24)および(2.25)を代入し、 t に関する共通項をまとめて整理する。これらの式は t の任意の値について成り立つ必要があることから、 t の各次の係数がそれぞれ独立に等式を満足しなければならない。このような操作を経て、各基礎式に対する摂動式の組が次のように求められる。

$$\sum_{k=1}^M -([T^{(M-k)}]^T \{ \sum_{j=1}^m a_{j0} \{B_j\} \sigma_j^{(k)} dx \} + [T^{(k)}]^T \{p^{(M-k)}\}) = \{P^{(M)}\} \quad (M=1, 2, \dots) \quad (2.27)$$

$$e_j^{(M)} = \sum_{k=1}^M -\{B_j\}^T [T^{(M-k)}] \{D^{(k)}\} \quad (M=1, 2, \dots) \quad (2.28)$$

$$\Theta_R^{(M)} = \sum_{k=1}^M -\{R^{(M-k)}\}^T \{D^{(k)}\} \quad (M=1, 2, \dots) \quad (2.29)$$

$$\{d^{(M)}\} = \sum_{k=1}^M -[T^{(M-k)}] \{D^{(k)}\} \quad (M=1, 2, \dots) \quad (2.30)$$

$$\{p^{(M)}\} = \sum_{j=1}^m a_{j0} \{B_j\} \sigma_j^{(M)} dx \quad (M=1, 2, \dots) \quad (2.31)$$

$$\sigma_j^{(M)} = E_{Tj} \{B_j\}^T [T^{(0)}] \{D^{(M)}\} + \hat{\sigma}_j^{(M)} \quad (M=1, 2, \dots) \quad (2.32)$$

ここに、 $\hat{\sigma}_j^{(M)}$ は $(M-1)$ 次以下の係数だけで計算できる項であり、 M 次の摂動方程式の中では既知の項として取り扱われる。すなわち、

$$\hat{\sigma}_j^{(1)} = 0$$

$$\hat{\sigma}_j^{(M)} = \sum_{k=1}^{M-1} -(E_{Tj} \{B_j\}^T [T^{(M-k)}] \{D^{(k)}\}) \quad (M=2, 3, \dots) \quad (2.33)$$

である。また、式(2.27)の左辺第2項は、式(2.25)、(2.26)を用いて、さらに次のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^M -[T^{(k)}]^T \{p^{(M-k)}\} &= [T^{(M)}]^T \{p^{(0)}\} + \sum_{k=1}^{M-1} -[T^{(k)}]^T \{p^{(M-k)}\} \\ &= ([T, \Theta_R]^T \Theta_R^{(M)} + [T, u_a]^T u_a^{(M)}) \{p^{(0)}\} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{M-1} -[T^{(k)}]^T \{p^{(M-k)}\} + [\hat{T}^{(M)}]^T \{p^{(0)}\} \\ &= ([T, \Theta_R]^T \{p^{(0)}\} \{R^{(0)}\}^T + [T, u_a]^T \{p^{(0)}\} [1 \ 0 \ 0] [T^{(0)}]) \{D^{(M)}\} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{M-1} -([T, \Theta_R]^T \{p^{(0)}\} \{R^{(M-k)}\}^T \{D^{(k)}\} \\ &\quad + [T, u_a]^T \{p^{(0)}\} [1 \ 0 \ 0] [T^{(M-k)}] \{D^{(k)}\} + [T^{(k)}]^T \{p^{(M-k)}\}) \\ &\quad + [\hat{T}^{(M)}]^T \{p^{(0)}\} \end{aligned} \quad (2.34)$$

式(2.27)に式(2.29), (2.32)および(2.34)を代入し, t の同次項を整理すれば, 次のような摂動方程式が導ける。

$$[K_G^{(0)}] \{D^{(M)}\} = \{P^{(M)}\} - \{\hat{P}^{(M)}\} \quad (M=1, 2, \dots) \quad (2.35)$$

ここに,

$$[K_G^{(0)}] = [T^{(0)}]^T \left[\sum_{j=1}^m a_j f_0^2 \{B_j\} E_{Tj} \{B_j\}^T dx \right] [T^{(0)}] \\ + [T, \theta_R]^T \{P^{(0)}\} \{R^{(0)}\}^T + [T, u_a]^T \{P^{(0)}\} \{1 \ 0 \ 0\} [T^{(0)}] \quad (2.36)$$

であり, また,

$$\{\hat{P}^{(1)}\} = \{0\} \\ \{\hat{P}^{(M)}\} = \sum_{k=1}^{M-1} -([T^{(M-k)}])^T \left[\sum_{j=1}^m a_j f_0^2 \{B_j\} \sigma_j^{(k)} dx \right] \\ + [T, \theta_R]^T \{P^{(0)}\} \{R^{(M-k)}\}^T \{D^{(k)}\} \\ + [T, u_a]^T \{P^{(0)}\} \{1 \ 0 \ 0\} [T^{(M-k)}] \{D^{(k)}\} + [T^{(k)}]^T \{P^{(M-k)}\} \\ + [T^{(0)}]^T \left[\sum_{j=1}^m a_j f_0^2 \{B_j\} \hat{\sigma}_j^{(M)} dx \right] + [\hat{T}^{(M)}]^T \{P^{(0)}\} \quad (M=2, 3, \dots) \quad (2.37)$$

である。摂動演算は, 式(2.37)に見られるように移動座標の座標変換に関する計算に集約される。また, 式(2.36)の $[K_G^{(0)}]$ は $[J]$ 状態での接線剛性行列であり, 増分摂動法を導入する以前の F E R T の要素基準剛性行列に対応するものである。

$[K_G^{(0)}]$ は, $[J]$ 状態での既知量を用いて計算でき, 次のように表わされる。

$$[K_G^{(0)}] = [T^{(0)}]^T [\kappa^{(0)}] [T^{(0)}] + [K_{FG}^{(0)}] \quad (2.38)$$

ここに,

$$[\kappa^{(0)}] = \sum_{j=1}^m a_j E_{Tj} \begin{bmatrix} 1/L & y_j/L & -y_j/L \\ & 4y_j^2/L & 2y_j^2/L \\ \text{SYM.} & & 4y_j^2/L \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

および,

$$[K_{FG}^{(0)}] = \begin{bmatrix} f_1/\ell & f_2/\ell & 0 & -f_1/\ell & -f_2/\ell & 0 \\ & f_3/\ell & 0 & -f_2/\ell & -f_3/\ell & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & f_1/\ell & f_2/\ell & 0 \\ & & & & f_3/\ell & 0 \\ \text{SYM.} & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

ここで,

$$f_1 = s^2 p_a^{(0)} + 2 s c q_b^{(0)} \\ f_2 = -s c p_a^{(0)} + (s^2 - c^2) q_b^{(0)} \\ f_3 = c^2 p_a^{(0)} - 2 s c q_b^{(0)} \\ q_b^{(0)} = -(m_a^{(0)} + m_b^{(0)})/\ell \quad (2.41a-d)$$

であり, $[T^{(0)}]$ は式(2.16)に与えられている。式(2.16), (2.41)に現われる s および c は, $\theta_R^{(0)}$ について計算され, ℓ は $u_a^{(0)}$ について計算される。

2. 3 伝達行列法による部材摂動方程式の誘導

式(2.35)は各要素毎の摂動方程式であり, 要素両端に系座標を設ける通常の有限要素法であれば, 直接, 系の摂動方程式を誘導することは容易である。しかし, 解くべき連立方程式の元数は, 要素数に比例して多くなる。そこで, 系座標が部材の要素数に関わらず部材の節点毎に設けられる座標数のみとなるように, 従来の F E R T で採用してきた伝達行列法をここでの摂動方程式にも適用する。

部材の右端から r 番目の要素に関する摂動方程式を次のように表示することにする。

$$[K_G^{(0)}]_r \{D^{(M)}\}_r = \{P^{(M)}\}_r - \{\hat{P}^{(M)}\}_r \quad (2.42)$$

上式を, その要素の右端に関する摂動係数と左端に関するものとに分けて表現すると,

$$\begin{bmatrix} [K_{RR}] & [K_{RL}] \\ [K_{LR}] & [K_{LL}] \end{bmatrix}_r \begin{Bmatrix} \{D_R^{(M)}\} \\ \{D_L^{(M)}\} \end{Bmatrix}_r = \begin{Bmatrix} \{P_R^{(M)}\} \\ \{P_L^{(M)}\} \end{Bmatrix}_r - \begin{Bmatrix} \{\hat{P}_R^{(M)}\} \\ \{\hat{P}_L^{(M)}\} \end{Bmatrix}_r \quad (2.43)$$

と書ける。ここに, 添字 R および L はそれぞれ要素の右端, 左端を意味している。また, $[K_{RR}]$, $[K_{RL}]$ などは, $[K_G^{(0)}]$ の部分行列である。式(2.43)を次のような r 要

素の左端と右端の摂動係数ベクトル

$$\{S_L^{(M)}\}_r = \begin{Bmatrix} \{D_L^{(M)}\} \\ \{P_L^{(M)}\} \end{Bmatrix}_r, \quad \{S_R^{(M)}\}_r = \begin{Bmatrix} \{D_R^{(M)}\} \\ \{P_R^{(M)}\} \end{Bmatrix}_r \quad (2.44a, b)$$

の関係に表現し直すと、次の形の摂動方程式が得られる。

$$\{S_L^{(M)}\}_r = [T_T^{(0)}]_r \{S_R^{(M)}\}_r - \{\hat{S}^{(M)}\}_r \quad (2.45)$$

ここに、

$$[T_T^{(0)}]_r = \begin{bmatrix} -[K_{RL}]^{-1}[K_{RR}] & [K_{RL}]^{-1} \\ [K_{LR}] - [K_{LL}][K_{RL}]^{-1}[K_{RR}] & [K_{LL}][K_{RL}]^{-1} \end{bmatrix}_r \quad (2.46)$$

$$\{\hat{S}^{(M)}\}_r = \begin{Bmatrix} [K_{RL}]^{-1}\{\hat{P}_R^{(M)}\} \\ [K_{LL}][K_{RL}]^{-1}\{\hat{P}_R^{(M)}\} - \{\hat{P}_L^{(M)}\} \end{Bmatrix}_r \quad (2.47)$$

である。式(2.46)の $[T_T^{(0)}]_r$ は、従来の F E R T で第 r 番目の要素の伝達行列と呼ばれているものに等しい。式(2.46)の $[T_T^{(0)}]_r$ を演算すると次のようになる。

$$[T_T^{(0)}]_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_{13} & & & \\ 0 & 1 & T_{23} & & [K_{RL}]^{-1} & \\ 0 & 0 & T_{33} & & & \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & T_{63} & T_{64} & T_{65} & T_{66} \end{bmatrix}_r \quad (2.48)$$

したがって、 $[K_{RL}]^{-1}$ と $T_{13} \sim T_{33}$, $T_{63} \sim T_{66}$ を計算すればよい (31)。

ところで、 r 要素の左端に関する状態量速度ベクトル $\{\dot{S}_L\}_r = \{\{\dot{D}_L\} \ \{\dot{P}_L\}\}_r^T$ と $(r+1)$ 要素の右端に関する状態量速度ベクトル $\{\dot{S}_R\}_{r+1} = \{\{\dot{D}_R\} \ \{\dot{P}_R\}\}_{r+1}^T$ には、

$$\{\dot{S}_R\}_{r+1} = [W] \{\dot{S}_L\}_r \quad (2.49)$$

の関係がある。ここに、

$$[W] = \begin{bmatrix} [I] & [0] \\ [0] & -[I] \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

である。式(2.49)の速度量を摂動展開し、 r 要素の左端に関する摂動係数ベクトル $\{S_L^{(M)}\}_r$ と $(r+1)$ 要素の右端に関する摂動係数ベクトル $\{S_R^{(M)}\}_{r+1}$ の関係を求めると、次のようになる。

$$\{S_R^{(M)}\}_{r+1} = [W] \{S_L^{(M)}\}_r \quad (2.51)$$

部材の右端の状態変数の摂動係数ベクトルを $\{S_{MR}^{(M)}\}$ で表わし、これが部材最右端要素の $\{S_R^{(M)}\}_1$ と等しいこと、および式(2.45), (2.51)を順次用いて、 $\{S_L^{(M)}\}_r$ と $\{S_{MR}^{(M)}\}$ との関係を記すと次のようになる。

$$\{S_L^{(M)}\}_r = [C^{(0)}]_r \{S_{MR}^{(M)}\} - \{\hat{P}_T^{(M)}\}_r \quad (2.52)$$

ここに、

$$\begin{aligned} [C^{(0)}]_1 &= [T_T^{(0)}]_1 \\ [C^{(0)}]_r &= [T_T^{(0)}]_r [W] [C^{(0)}]_{r-1} \quad (r=2, 3, \dots, n) \end{aligned} \quad (2.53)$$

であり、また、

$$\begin{aligned} \{\hat{P}_T^{(M)}\}_1 &= \{\hat{S}^{(M)}\}_1 \\ \{\hat{P}_T^{(M)}\}_r &= [T_T^{(0)}]_r [W] \{\hat{P}_T^{(M)}\}_{r-1} + \{\hat{S}^{(M)}\}_r \quad (r=2, 3, \dots, n) \end{aligned} \quad (2.54)$$

である。部材の最左端の n 要素において式(2.52)を書き、 $\{S_L^{(M)}\}_n = \{S_{ML}^{(M)}\}$ とすると、

$$\{S_{ML}^{(M)}\} = [C^{(0)}]_n \{S_{MR}^{(M)}\} - \{\hat{P}_T^{(M)}\}_n \quad (2.55)$$

となる。これは部材の左右の状態変数に関係づける摂動方程式である。

$\{S_{ML}^{(M)}\}$ および $\{S_{MR}^{(M)}\}$ を部材左右の材端変位摂動係数 $\{D_{ML}^{(M)}\}$, $\{D_{MR}^{(M)}\}$ ならびに材端力摂動係数 $\{P_{ML}^{(M)}\}$, $\{P_{MR}^{(M)}\}$ で表現すると、

$$\begin{Bmatrix} \{D_{ML}^{(M)}\} \\ \{P_{ML}^{(M)}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [C_{11}] & [C_{12}] \\ [C_{21}] & [C_{22}] \end{bmatrix}_n \begin{Bmatrix} \{D_{MR}^{(M)}\} \\ \{P_{MR}^{(M)}\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{\hat{P}_{T1}^{(M)}\} \\ \{\hat{P}_{T2}^{(M)}\} \end{Bmatrix}_n \quad (2.56)$$

となる。ここで、 $[C_{11}]$, $[C_{12}]$ などは $[C^{(0)}]_n$ の部分行列であり、 $\{\hat{P}_{T1}^{(M)}\}$ および $\{\hat{P}_{T2}^{(M)}\}$ は $\{\hat{P}_T^{(M)}\}_n$ の部分ベクトルである。

式(2.56)を材端力摂動係数 $\{P_M^{(M)}\}$ と材端変位摂動係数 $\{D_M^{(M)}\}$ の関係に変換すると、次の部材の摂動方程式が得られる。

$$[K_M^{(0)}] \{D_M^{(M)}\} = \{P_M^{(M)}\} - \{\hat{P}_M^{(M)}\} \quad (2.57)$$

ここに、

$$[K_M^{(0)}] = \begin{bmatrix} -[C_{12}]^{-1}[C_{11}] & [C_{12}]^{-1} \\ [C_{21}] - [C_{22}][C_{12}]^{-1}[C_{11}] & [C_{22}][C_{12}]^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

$$\{D_M^{(M)}\} = \begin{Bmatrix} \{D_{MR}^{(M)}\} \\ \{D_{ML}^{(M)}\} \end{Bmatrix}, \quad \{P_M^{(M)}\} = \begin{Bmatrix} \{P_{MR}^{(M)}\} \\ \{P_{ML}^{(M)}\} \end{Bmatrix} \quad (2.59a, b)$$

であり、また

$$\{\hat{P}_M^{(M)}\} = \begin{Bmatrix} [C_{12}]^{-1} \{\hat{P}_{T1}^{(M)}\}_n \\ [C_{22}][C_{12}]^{-1} \{\hat{P}_{T1}^{(M)}\}_n - \{\hat{P}_{T2}^{(M)}\}_n \end{Bmatrix} \quad (2.60)$$

である。 $[K_M^{(0)}]$ は $[J]$ 状態での部材の接線剛性行列であり、 $[J]$ 状態での既知量を用いて計算できる。式(2.57)から系の摂動方程式は、通常の剛性法に従って容易に導ける。このとき、解くべき連立方程式の元数は、要素数に関わらず部材の両端の系の節点数のみに依存し、式(2.35)の要素の摂動方程式から、直接、系の摂動方程式に拡張する場合より、元数を格段に減らすことができる。

2.4 増分長の決定

増分摂動法では、増分長 t_{cr} は予め設定される必要はなく、各ステップですべての状態変数の解析的一価性が保持される区間内の値に自動的に決定される[1~4]。2.6節で提示するプログラムで採用されている決定要因を以下に列記しておく。

(1) 打ち切り誤差による限界：ある変数 $a(t)$ の増分値を m 次の摂動次数まで求めて得られる近似解に含まれる相対誤差 RE は次式のように近似的に評価される。

$$RE = |a^{(m)} t^m / \sum_{M=1}^m a^{(M)} t^M| \quad (2.61)$$

打ち切り誤差 RE を予め指定した許容限界値 RE_{limit} 以下とするためには、現ステップ

の増分長を次の t に関する高次方程式の正の最小根以下に設定する必要がある。

$$RE_{limit} = |a^{(m)} t^m / \sum_{M=1}^m a^{(M)} t^M| \quad (2.62)$$

(2) 状態変数の解析的一価性による限界：解析的一価性の条件が犯される要因としては、材料線要素の降伏および除荷の発生、つり合い経路上の分岐点の存在が考えられる。ここで提案する解析法では、材料線要素の降伏および除荷の発生による打ち切り限界を精確に求めており、区分線形化応力ひずみ関係について以下のように増分長の候補値を計算している。

a) 材料線要素の降伏 …… 弾性域あるいは除荷域にある材料線要素の代表ひずみが、降伏ひずみに達すると剛性係数は不連続に変化する。代表ひずみの摂動係数を $e^{(M)}$ 、応力正側あるいは負側の降伏ひずみを e_y とすると、次式を満たす t は増分長の候補値である。

$$e(t) = \sum_{M=0}^m e^{(M)} t^M = e_y \quad (2.63)$$

b) 材料線要素の除荷 …… 塑性域にある材料線要素の代表ひずみの摂動係数が次式の条件を満たしたならば、その時点から除荷過程が始まり弾性則が適用される。したがって、次式を満たす t は増分長の候補値である。

$$\dot{e}(t) = \sum_{M=1}^m M e^{(M)} t^{M-1} = 0 \quad (2.64)$$

材料線要素の除荷は、他の材料線要素が降伏して、剛性が不連続に変化することに伴って発生する場合もある。この種の除荷の発生については、各増分段階で構成則に関してひずみの進行方向に矛盾がないかどうかを検査し、対応する材料線要素に対し矛盾のない構成則が選択適用される。

c) 区分線形化応力ひずみ関係のひずみ硬化係数変更点 …… 第3章の鋼材の例題、第4および5章の解析で用いられるような区分線形化応力ひずみ関係では、塑性域にある材料線要素の代表ひずみが、ひずみ硬化係数変更点に達すると剛性係数は不連続に変化する。この場合の増分長の計算式は、式(2.63)の右辺の e_y を硬化係数変更点ひずみ値で置き換えることによって得られる。

分岐点の取り扱いに関しては、接線剛性係数行列 $[K^{(0)}]$ の正定値性を失う条件となる $\det[K^{(0)}] = 0$ を t に関して摂動展開する方法が文献[1~4]に示されている。この方法は多くの計算を要すると予想されることから、実際の計算では t の予測値を代入して $\det[K^{(0)}]$ を繰り返し計算することによって、 t の打ち切り限界を求める手法を文献[1~4]では提案している。本解析法には、この打ち切り限界は採用していないが、これを導入することは可能である。接線剛性係数行列 $[K^{(0)}]$ の正定値性が失われた場合の弾塑性分岐経路は、第1章1.7節に示した手順に基づいて作成された次節のアルゴリズムによって追跡することができる。なお、弾性分岐経路については、前述の $\det[K^{(0)}] = 0$ を満たす繰り返し計算手順と伴に、弾性安定論（例えば、文献[15~19, 26~32]）にしたがって分岐直後の経路を予測し、その後増分解析を実行する手順を導入すればよい。

(3) 要素の自動細分割に伴う限界：文献[5~9], 14)の解析法同様、ひずみの進行に伴って要素の自動分割を行っており、被分割要素である母要素の4隅のひずみが指定値に達するときの t も増分長の候補値である。この場合の増分長の計算式も、式(2.63)と類似のものとなる。

現増分段階の増分長 t_{or} は、以上(1)~(3)の決定要因から計算される候補値の最小値として与えられる。

2.5 整合剛性選択アルゴリズム

本研究者は、これまでの骨組の弾塑性解析においても、整合剛性選択過程が循環剛性選択過程に陥る直前には、第1章に示した剛体-ばね柱モデルが循環剛性選択過程に陥るとき同様、系方程式の剛性行列が正定値でなくなるという情報を得ていた。したがって、骨組の複合非線形解析における循環剛性選択過程のメカニズムも剛体-ばね柱モデルと類似のメカニズムであり、1.7節の整合剛性選択手順が骨組の弾塑性解析にも有効であると予想される。本節では、剛体-ばね柱モデルの整合剛性選択手順に基づいて、多材料線要素からなる多自由度系骨組モデルの整合剛性選択アルゴリズムを作成する。

前ステップまでの増分解析で既に求まっている $[J]$ 状態において、降伏条件を満たしている全ての材料線要素が次の瞬間に負荷挙動するとした剛性係数選択に基づいて、系の係数行列 $[K^{cs(0)}]$ を作成する。すなわち $[K^{cs(0)}]$ は、Hillの弾塑性連続体における比較体(comparison solid)[21]として評価された系剛性行列である。

この $[K^{cs(0)}]$ を採用したときの方程式は次のように書かれる。

$$[K^{cs(0)}]\{U_s^{(1)}\} = \lambda^{(1)}\{f\} \quad (2.65)$$

ここに、 $\{U_s^{(1)}\}$ は系の節点座標変位（系座標変位）の1次摂動係数、 $\lambda^{(1)}$ は荷重パラメータの1次摂動係数であり、 $\{f\}$ は荷重分布ベクトルである。

式(2.65)の行列 $[K^{cs(0)}]$ の固有値を $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$; $\rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_n$ とし、対応する正規化固有ベクトルを $\{\phi_1\}, \{\phi_2\}, \dots, \{\phi_n\}$ とする。1.7節で行なったように、固有ベクトル $\{\phi_1\}, \{\phi_2\}, \dots, \{\phi_n\}$ による $\{U_s^{(1)}\}$ の表現を求めてみる。行列 $[\Phi] = [\{\phi_1\} \{\phi_2\} \dots \{\phi_n\}]$ を用いて座標軸の変換を行なうと、式(2.65)は固有値 $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ を対角成分とする係数行列をもつ次の方程式に変換できる。

$$[\Pi]\{u_s^{(1)}\} = \lambda^{(1)}\{g\} \quad (2.66)$$

ここに、

$$[\Pi] = [\Phi]^T [K^{cs(0)}] [\Phi] = \begin{bmatrix} \rho_1 & & 0 \\ & \rho_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \rho_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 & & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & & [\bar{\rho}] \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

$$\{u_s^{(1)}\} = [\Phi]^T \{U_s^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} \frac{u_{s1}^{(1)}}{\bar{u}_s^{(1)}} \\ \vdots \\ \frac{u_{sn}^{(1)}}{\bar{u}_s^{(1)}} \end{Bmatrix} \quad (2.68)$$

$$\{g\} = [\Phi]^T \{f\} = \begin{Bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ \bar{g} \end{Bmatrix} \quad (2.69)$$

である。式(2.66)を $\{u_s^{(1)}\}$ について解くと、

$$\begin{Bmatrix} \frac{u_{s1}^{(1)}}{\bar{u}_s^{(1)}} \\ \vdots \\ \frac{u_{sn}^{(1)}}{\bar{u}_s^{(1)}} \end{Bmatrix} = \lambda^{(1)} \begin{Bmatrix} g_1/\rho_1 \\ \vdots \\ \bar{g}_k/\bar{\rho}_k \end{Bmatrix} \quad (2.70)$$

となる。したがって、式(2.68)より $\{U_s^{(1)}\}$ は次のように書ける。

$$\{U_s^{(1)}\} = [\Phi] \{u_s^{(1)}\} = [\{\phi_1\} \mid \{\bar{\phi}\}] \begin{Bmatrix} u_{s1}^{(1)} \\ \{u_s^{(1)}\} \end{Bmatrix}$$

$$= \lambda^{(1)} \left(\frac{g_1}{\rho_1} \{\phi_1\} + \sum_{k=2}^n \frac{g_k}{\rho_k} \{\phi_k\} \right) \quad (2.71)$$

系座標変位の1次摂動係数 $\{U_s^{(1)}\}$ は、部材端変位、要素端変位の1次摂動係数に変換され、全材料線要素のひずみの1次摂動係数ベクトル $\{e^{(1)}\}$ と関係づけられる。系座標変位の摂動係数と材料線要素のひずみの摂動係数が行列 $[B]$ で関係づけられるとすると、式(2.71)から、 $\{e^{(1)}\}$ は次のように書ける。

$$\{e^{(1)}\} = [B] \{U_s^{(1)}\}$$

$$= \lambda^{(1)} \left(\frac{g_1}{\rho_1} [B] \{\phi_1\} + \sum_{k=2}^n \frac{g_k}{\rho_k} [B] \{\phi_k\} \right) \quad (2.72)$$

行列 $[K^{0s(0)}]$ の複数の固有値が同時に0または負になることは考えないことにすると、行列 $[K^{0s(0)}]$ が正定値でなくなった場合には、 $\rho_1 \leq 0$ である。塑性剛性係数をとる材料線要素が少しずつ増えていくにつれて、あるいは剛性行列内の幾何非線形項の影響によって、最小固有値 ρ_1 が正の値から0または負の値に次第に移行していくと予想されることから、初めて $\rho_1 \leq 0$ となったとき、 ρ_1 の絶対値は殆どの場合0に近い。それゆえ、行列 $[K^{0s(0)}]$ が正定値でなくなった場合、式(2.71)より、固有値 ρ_1 に対応する固有ベクトル $\{\phi_1\}$ のモードが1次摂動解 $\{U_s^{(1)}\}$ において最も寄与分の大きいモードとなる。また式(2.72)は、材料線要素のひずみ速度の符号の決定にそのモードが支配的役割を演ずることを示唆している。したがって、 $\{U_s^{(1)}\}$ を $\{\phi_1\}$ とそれ以外の成分から成り立っていると見ると、最小固有値 ρ_1 が0近傍の値となったとき、前者が後者に対して支配的となる状況は、第1章で考察した単純モデルに見られた2つの固有ベクトル間の関係とよく対応している。それゆえ、1.7節で記述された2自由度2弾塑性ばねの整合剛性選択に関する基本的性質が、多自由度モデルにおいても保有されていると推測できる。

第1章の2自由度2弾塑性ばね柱モデルにおける剛性選択過程についての解析的検討から、この多材料線要素からなる多自由度系骨組モデルについて、弾塑性比較体に対応する材料線要素の剛性係数の組み合わせを選択したときの系摂動方程式の係数行列 $[K^{0s(0)}]$ の最小固有値 ρ_1 の符号に着目することによって、剛性選択過程が次の3つの場合に分類できると類推される；

[CASE 1] $\rho_1 > 0$ すなわち $[K^{0s(0)}]$ が正定値であれば、ひずみの1次摂動係数に応じて材料線要素の剛性係数の変更を繰り返すことによって、構成則に整合する剛性係数の組み合わせを選択することができる。

[CASE 2] ひずみの1次摂動係数に応じて材料線要素の剛性係数を変更する手順で循環剛性選択過程に陥る場合には、 $\rho_1 \leq 0$ であり $[K^{0s(0)}]$ は正定値でない。

[CASE 3] $\rho_1 \leq 0$ すなわち $[K^{0s(0)}]$ が正定値でない場合にも、全ての材料線要素についてひずみの1次摂動係数と剛性係数とが構成則に整合している場合がある。この場合には、実現象としては起こり得ない経路を追跡してしまう。

解析を遂行する上で問題となるのは、[CASE 2]および[CASE 3]の系の比較体としての係数行列 $[K^{0s(0)}]$ が正定値でなくなったときである。そのときの整合剛性選択アルゴリズムとして、1.7節で提案した単純ばね柱モデルの整合剛性選択手順と同様の手順がここでも有効であると考えられる。

以上の考察から、比較体としての係数行列 $[K^{0s(0)}]$ が正定値でなくなったときの整合剛性選択アルゴリズムとして、以下の手順を提案する：

(STEP 1) 系座標変位の1次摂動係数 $\{U_s^{(1)}\}$ として、負または0の固有値 ρ_1 に対応する固有ベクトル $\{\phi_1\}$ を採用する。必ず $+\{\phi_1\}$ および $-\{\phi_1\}$ の2通りについて行なう。

(STEP 2) $\{U_s^{(1)}\}$ に適合する部材端変位の1次摂動係数 $\{D_M^{(1)}\}$ 、要素基準座標変位の1次摂動係数 $\{D^{(1)}\}$ および要素局所座標変位の1次摂動係数 $\{d^{(1)}\}$ を算定し、全材料線要素のひずみの1次摂動係数 $e^{(1)}$ を算定する。

(STEP 3) 材料線要素のひずみの1次摂動係数 $e^{(1)}$ に対応する各材料線要素の剛性係数 E_T を選択し、係数行列 $[K_s^{(0)}]$ を作成する。

(STEP 4) $[K^{0s(0)}]$ に関する $\{\phi_1\}$ の非0成分のうちそのモードを代表する適当な変数を制御変数として選択し、 $\{U_s^{(1)}\}$ のその制御変数成分に制御方向に対応する符号をもつ適当な指定値を代入し、系方程式を解いて残りの変数を求める。

(STEP 5) (STEP 2)と同様に、全材料線要素のひずみの1次摂動係数 $e^{(1)}$ を算定し、 E_T との整合性を調べる。矛盾する材料線要素があれば、その剛性係数 E_T を修正し、再び $[K_s^{(0)}]$ を作成し、(STEP 4)にしたがって、制御変数の値を指定して系方程式を解く。整合する解が得られるか、剛性係数の組み合わせが有限個の組み合わせの循環に陥ったことを確認するまで、これを繰り返す。

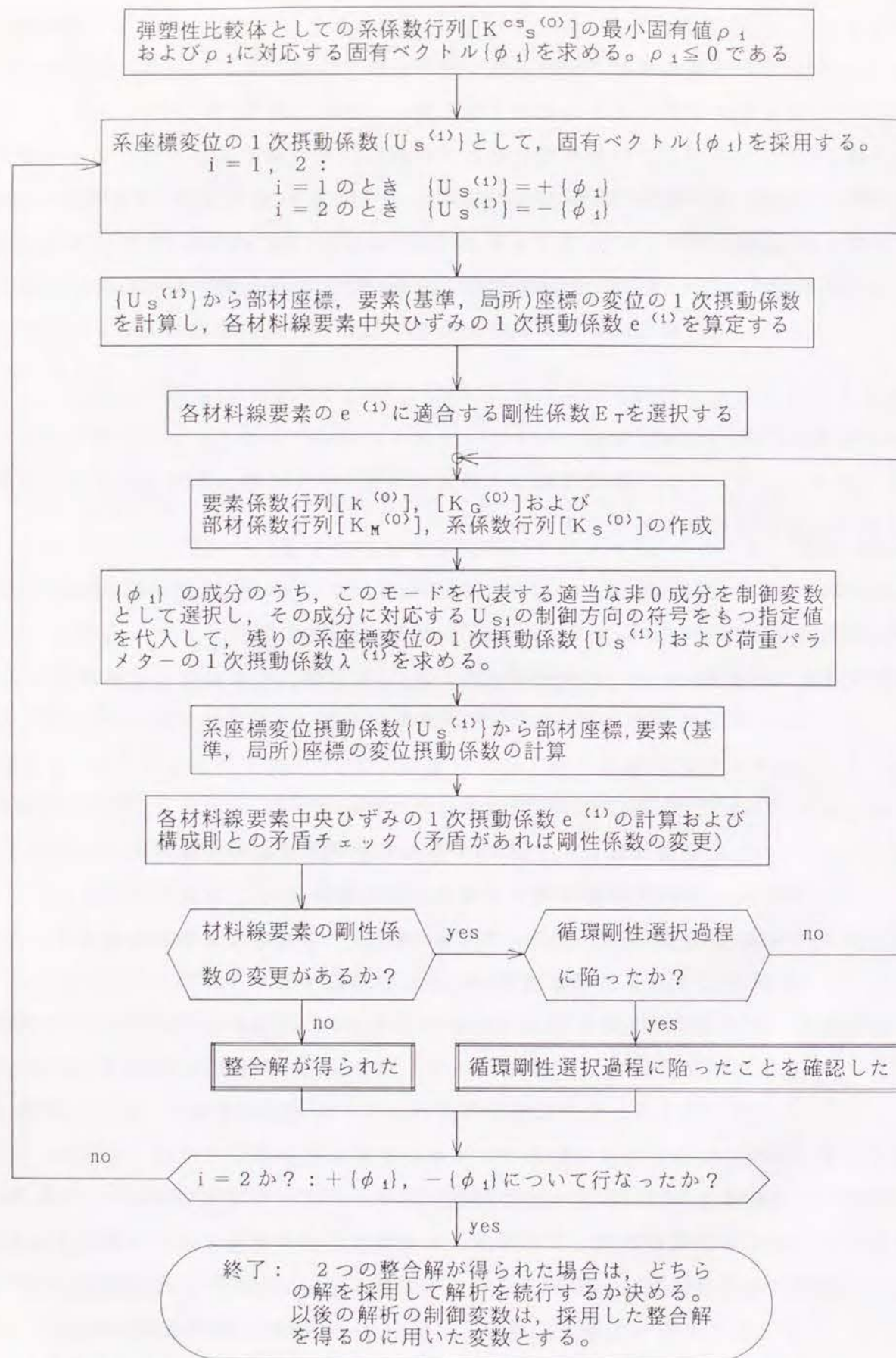


図-2.3 弾塑性比較体としての系係数行列が正定値でなくなったときの整合剛性選択アルゴリズム

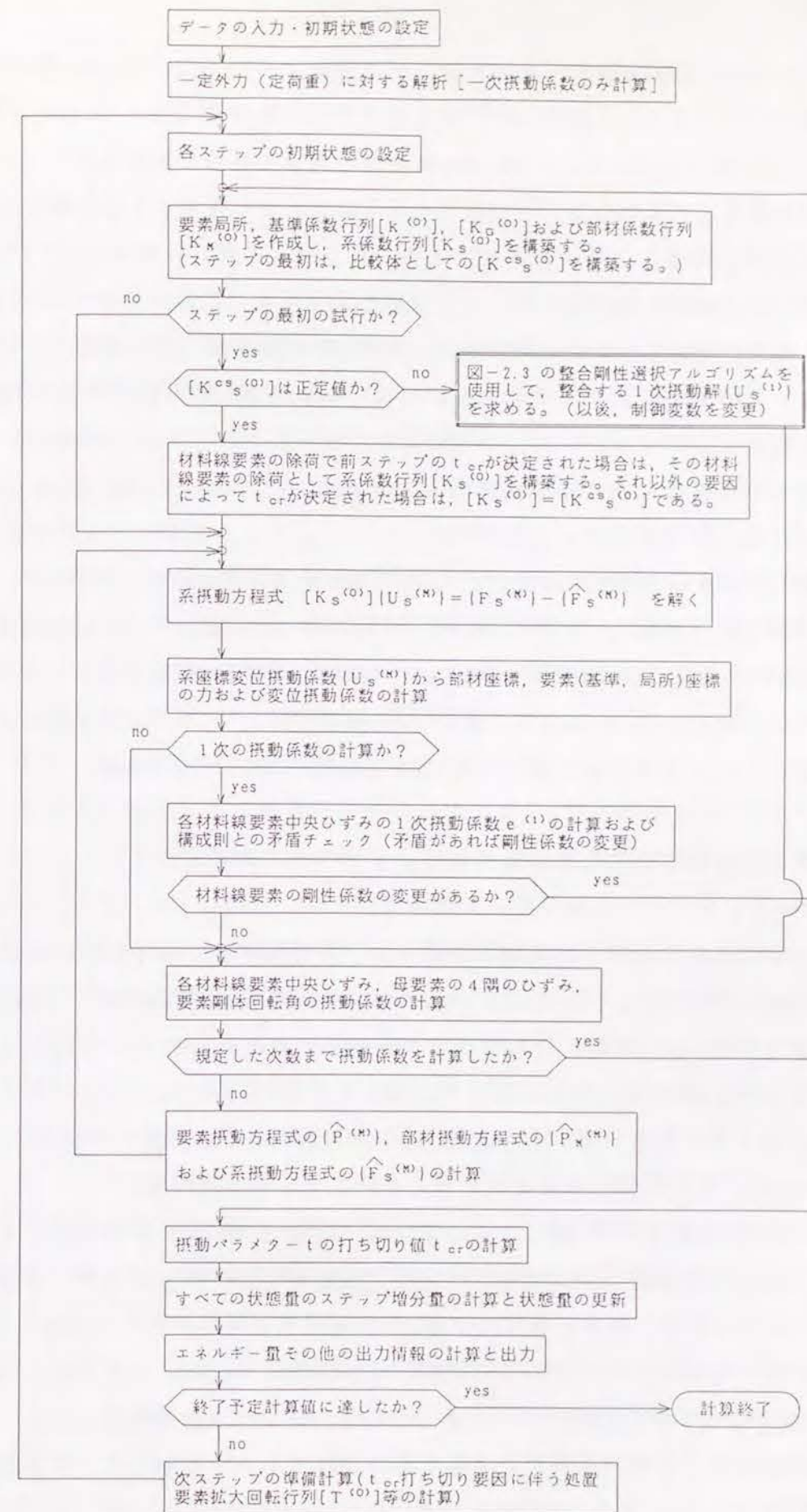


図-2.4 弾塑性平面骨組の静的臨界挙動解析用プログラム FERT-P の概略流れ図

$+\{\phi_1\}$ について循環剛性選択過程に陥った場合は、 $-\{\phi_1\}$ とすれば、整合する解が得られるであろう。 $+\{\phi_1\}$ について整合解が得られた場合に、 $-\{\phi_1\}$ として循環剛性選択過程に陥ったときは、 $+\{\phi_1\}$ の整合解を用いて解析を続ける。 $-\{\phi_1\}$ についても整合解が得られた場合は、解析目的と照らし合わせて採用する整合解を決める。[CASE 3]は分岐経路を持つ場合であり、2つの整合解を採用した場合についてそれぞれ解析を続行する必要がある。

以上の手順を、図-2.3に示す。各ステップで最初の係数行列を構築するに際し、前ステップの増分長が降伏で決定された場合は、その降伏した材料線要素の剛性係数を塑性剛性係数に変更する。一方、除荷によって増分長が決定された場合には、その材料線要素の剛性係数は塑性剛性係数のままとする。これら以外の要因で増分長が決定された場合は、剛性係数は何ら変更しない。このようにして係数行列を構築すれば、比較体に対応する係数行列 $[K^{\text{os}}_s^{(0)}]$ が作成される。それゆえ、各ステップで最初に構築される係数行列すなわち $[K^{\text{os}}_s^{(0)}]$ の正定値性を調べればよい。前ステップの増分長が除荷によって決定された場合は、最初に作成した $[K^{\text{os}}_s^{(0)}]$ の正定値性を確認した後、除荷が生じるとした $[K_s^{(0)}]$ を構築する。この $[K_s^{(0)}]$ もまた正定値性を有することは、弾塑性安定論の一般理論で証明されている[22]。

2. 6 弾塑性骨組の静的臨界挙動予測解析プログラム F E R T - P

2. 4 節までに示した解析法基礎式に従って、弾塑性平面骨組の静的臨界挙動解析用プログラムを作成した。図-2.4にそのプログラムの基本的な概略流れ図を示す。本解析法は文献[5~9], [36], 27)の弾塑性骨組の大たわみ解析法の特徴である移動座標系の採用と伝達行列法を用いており、最近の文献[36], 27)でそのプログラムを F E R T と呼んでいることと、増分摂動法に依っていることを示す P (Perturbation の頭文字)から、ここで作成したプログラムを F E R T - P と呼ぶ。

骨組の係数行列 $[K_s^{(0)}]$ は、通常、正定値で対称バンド性を保有している。正定値対称バンド行列を係数とする連立1次方程式を変形コレスキー法で解く数値計算プログラムを採用すれば、係数行列の L D L^T分解過程でピボットが負になることによって、その係数行列が正定値でなくなったことを判別できる[39]。したがって、弾塑性比較体の $[K^{\text{os}}_s^{(0)}]$ の正定値性の判定は、方程式を解く過程の処理情報によって得られる。正定値でないと判定されたときのみ固有値計算が行なわれ、2. 5 節で提案した整合剛性選択アルゴリズムが実行される。巻末Appendixに F E R T - P のプログラ

ム・ユニットの構成と整合剛性選択アルゴリズムを具体化したプログラムの概説、座標変換に関する摂動演算部の概説を付したので、参照されたい。

2. 7 まとめ

本章では、増分摂動法による平面骨組の複合非線形解析法基礎式の定式化過程を示し、さらに、第1章の整合剛性選択問題の論理的検討から得た知見を基に、材料線要素の整合剛性を合理的に選択するアルゴリズムを提案した。また、この整合剛性選択アルゴリズムを備えた弾塑性骨組の静的臨界挙動予測解析プログラム F E R T - P を提示した。本章の成果および知見を以下にまとめる：

- (1) 増分摂動法を適用することによって、骨組の複合非線形解析において、材料線要素の応力ひずみ経路上における除荷開始点の予測をも含めて材料履歴モデルを精確に追跡することが可能となり、かつ増分型複合非線形解析法の使用時に、その設定規範が提供されておらず解析法使用者の判断に委ねられていた増分刻み幅の設定問題を根本的に解消することが可能となった。
- (2) 系の比較体としての係数行列の最小固有値 ρ_1 が0近傍の値となったとき、変位およびひずみの摂動係数の表現において、 ρ_1 に対応する固有ベクトルがそれ以外の固有ベクトル成分に対して支配的となる状況が、第1章で考察した単純モデルに見られた2つの固有ベクトル間の関係とよく対応していることから、弾塑性骨組の剛性選択過程に関する次の3つの場合分けが、第1章の2自由度2弾塑性ばね柱モデルについての同様の場合分けから類推される：

[CASE 1] 比較体に対応する係数行列が正定値であれば、ひずみの1次摂動係数に応じて材料線要素の剛性係数の変更を繰り返すことによって、構成則に整合する剛性係数の組み合わせを選択することができる。

[CASE 2] ひずみの1次摂動係数に応じて材料線要素の剛性係数を変更する手順で循環剛性選択過程に陥る場合には、比較体に対応する係数行列は正定値でない。

[CASE 3] 比較体に対応する係数行列が正定値でない場合にも、全材料線要素のひずみの1次摂動係数と剛性係数とが構成則に整合している場合がある。この場合は実現象としては起こり得ない経路を追跡する。

- (3) 系の比較体としての係数行列が正定値でなくなった場合に、その係数行列の負

または0の固有値に対応する固有ベクトルで表わされるモードが1次摂動解の支配的モードであると考え、負または0の固有値に対応する固有モードに適合する材料線要素のひずみ速度から剛性係数の組み合わせを選択し、その後、モードを代表する適当な非0成分を制御変数とした変位制御解析を行なうというアルゴリズムを提案した。このアルゴリズムは、剛性選択過程が循環剛性選択過程に陥るのを防ぐばかりでなく、(2)の[CASE 3]の弾塑性分岐つり合い経路の追跡にも有効である。これまで本研究者は、骨組の弾塑性解析において、循環剛性選択過程に陥る直前に、[CASE 2]の比較体としての係数行列が正定値でなくなるという経験をしている。また、現時点で、比較体としての係数行列が正定値でなくなるという以外の特性をもつ循環剛性選択過程の存在を知らない。骨組の弾塑性解析において、ここで提案したアルゴリズムが有効に働き、これまで難題であった整合剛性選択問題における循環過程は、ほぼ確実に避けられると期待される。

なお、解析法基礎式の定式化に際しては、特に、i) 大たわみでの精度が確保できること、ii) 実用規模の骨組の挙動解析が可能であること、の2点が留意されている。それゆえ、FERT-Pの基礎式には、以下の特徴がある：

- ① 部材の座屈現象を含むような骨組の臨界挙動は、微小ひずみ大たわみ問題として取り扱え、その挙動予測解析法で移動座標系を採用することは精度を保つ上で効果的な方法である。移動座標系を採用する場合には、基準となる固定座標系との間の座標変換行列を摂動展開する必要があるが、この座標変換行列が周期関数で構成されていることに着目すれば、その摂動展開は2次の導関数まで求めておけばよい。
- ② 移動座標系の採用で線形のひずみ変位関係式を用いても十分な精度が保持されるという過去の知見に基づいて、線形のひずみ変位関係式を採用し、摂動演算を①の特性を活かすよう座標変換行列の摂動展開にできるだけ集約する定式化を行なっている。線形のひずみ変位関係式の採用は、材料定数が変わらない限り、大たわみにおいても移動座標系で記述された要素剛性行列の変更を要しない点で計算効率上有利である。
- ③ 実用規模骨組の解析を行なうには、解くべき摂動方程式の元数を低減することは不可欠な要求である。それゆえ、隣りあう要素端の状態量速度ベクトル間の関係式を摂動展開することで、伝達行列法が増分摂動法でも適用できることを示し、解くべき全体系の摂動方程式の元数を部材の要素数に関わらず、部材節点毎に設けられた系座標の数まで方程式の元数を低減できることを示した。

3.1 序

第2章に示した弾塑性骨組の静的臨界挙動予測解析プログラムFERT-Pは、増分摂動法による定式化がなされていることから、各変数増分解に含まれる相対誤差を指定した限界範囲内に収めるよう、また材料線要素の材料履歴を精確に追跡するよう、増分刻み幅を自動的に決定できる機能を有している。それに加えて、FERT-Pには、剛体-ばね柱モデルのばねの剛性係数を確実に選択することのできる手順に基づいて第2章で作成された合理的な整合剛性選択アルゴリズムが具備されている。

このFERT-Pの性能を検証するために、本章では、まずよく知られた弾性の対称および非対称分岐問題を対象とする解析結果を示す。対称分岐問題としてはエラスチカ問題[40]を、非対称分岐問題としてはBritvec・Chilverの三角ラーメン[41, 42]を採り上げた。これらの問題の解析では、打ち切り誤差限界を指定することで増分刻み幅(増分長)が自動的に決定され、分岐点の極めて近傍を通る釣合経路を難無く追跡できることが確認される。

次に、弾塑性問題の予測解析例として、鋼部材の軸方向繰返し実験を対象とした解析結果を示す。次に、弾性非対称分岐問題として採り上げた三角ラーメンが分岐後材料線要素が降伏する場合の釣合経路を解析した結果を示す。その解析では、第2章で提案した整合剛性選択アルゴリズムを使用しない場合には循環剛性選択過程に陥る事態が発生している。三角ラーメンおよび部材中央付近にヒンジ、両端部に弾塑性ばねが存在する剛体柱と剛梁で構成された門形ラーメンの整合剛性選択過程を詳細に示し、第2章で提案した整合剛性選択アルゴリズムによって、循環剛性選択過程に陥ることなく解析が遂行されることを示す。

なお、本章の解析例は、いずれも摂動係数を3次までとし、変位増分法を用いて計算されている。使用した計算機は、京都大学大型計算機センターFACOM-VP200である。計算時間を参考までに記したが、プログラム・コードのベクトル化など計算時間を節約する工夫は特別には行なっていない。

3. 2 弾性分岐挙動の予測解析

3.2.1 単純梁柱の対称分岐挙動

図-3.1は、エラスチカ曲線[40]を対象とした単純梁柱の弾性座屈挙動の解析結果である。図中に示した A は断面積、 I は断面2次モーメント、 E はヤング係数である。部材断面は等価サンドイッチ断面にモデル化されている。制御変数は軸方向変位 δ_v である。

図中実線は、幾何非線形問題において要素数を少なくする目的で、変位関数に曲げ縮み連成項を取り入れたFERT-Bによる結果(4)であり、部材は4要素に均等分割されている。これは接線剛性係数法で解析されている。□印はFERT-Pの6要素による結果、○印は10要素による結果である。打ち切り誤差制御は荷重 P と部材中央の横変位 δ_H について行なわれており、式(2.62)の誤差限界 RE_{limit} は□印、○印で示した解析とも1.0%である。また・印は10要素で誤差限界を0.1%とした結果である。FERT-Pによるプロットは、いずれも5ステップ毎に行なわれている。FERT-Bにおけるステップ数1900は、オイラー座屈荷重の1.01倍の荷重値までは増分長を $L/10^5$ とし、それ以上の荷重値については $L/10^2$ とすることで要したステップ数である。これらの増分長は幾度かの試行によって設定されたものである。一方、FERT-Pでは増分長は自動的に決定され、オイラー座屈荷重値近傍で増分長は短くなり、それ以外の範囲ではある程度長くとして計算を実行していることがわかる。

従来の線形増分型解析法では、この問題のように対象とする挙動が予めわかっており、増分長を短くしなければならない領域を予想することができる場合には、増分長を数度の試行で比較的容易に設定することもできるが、予想できない場合には、設定した増分長に解析精度が依存することから、全増分段階の計算をかなり短い増分長で行なう必要があり、その精度を合理的に管理をすることも困難である。このような幾何非線形問題では、不釣合力を解除するための収束計算を行なうことを前提に増分長を比較的長く設定することも可能である。しかし、材料非線形を含む場合は、幾何非線形問題で採用されるような収束計算は正当化されない[3, 4]。

なお、数値計算に要した時間は、図-3.1のFERT-Bの4要素の場合で4.81秒、○印のFERT-Pの10要素の場合は2.25秒であった。

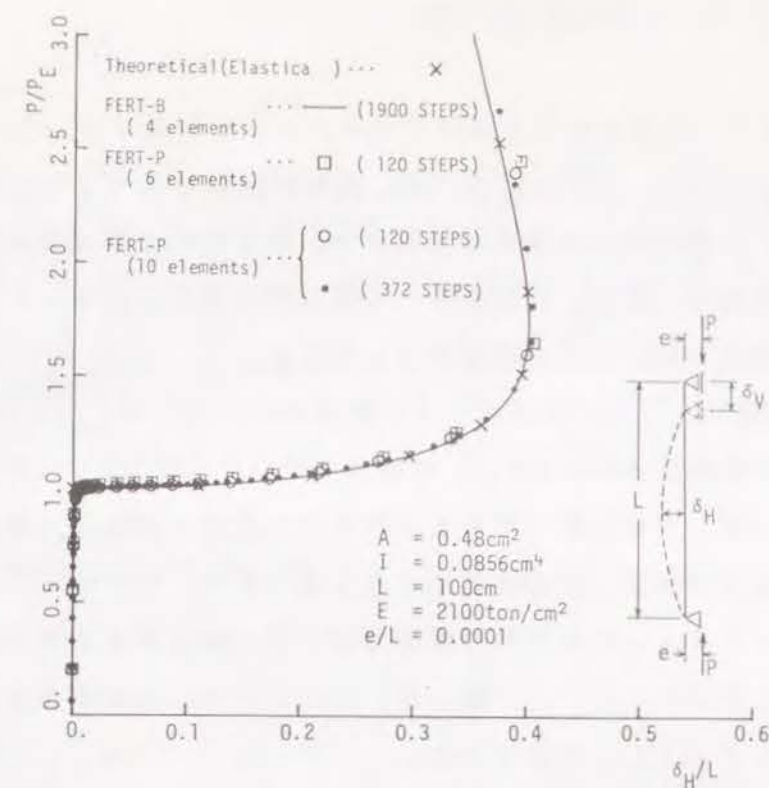


図-3.1 単純梁柱の弾性座屈挙動の解析

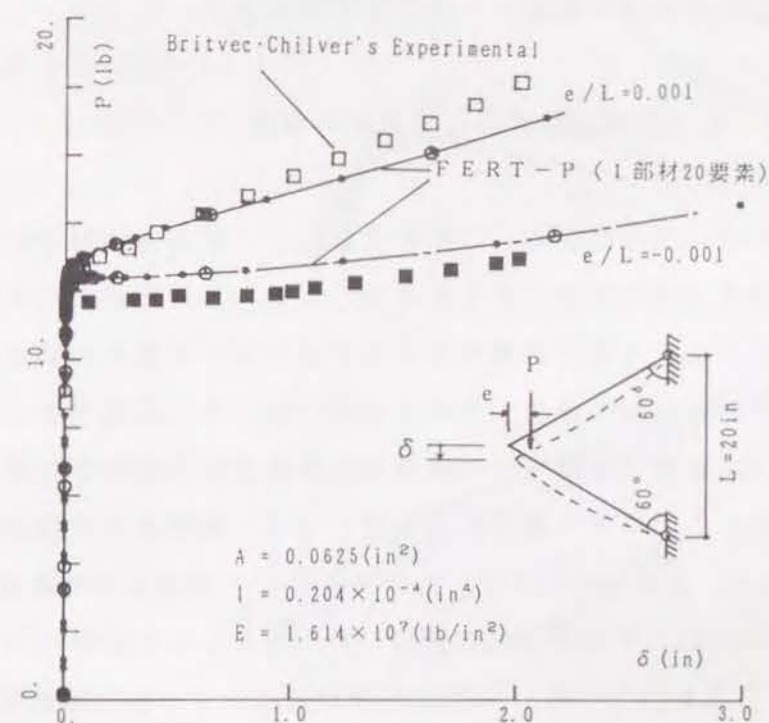


図-3.2 三角ラーメンの非対称分岐挙動の解析

3.2.2 三角ラーメンの非対称分岐挙動

図-3.2中に示す2部材からなる弾性三角ラーメンを解析する。Britvec・Chilverによる文献[41, 42]で採り上げられている。部材断面は等価サンドイッチ断面にモデル化されている。1部材は20の要素に分割され、各部材の4等分点に節点を設け、支点以外の節点には水平、鉛直、回転の3つの系座標が設定されている。支点は回転座標のみである。制御変数は頂点の鉛直変位 δ である。

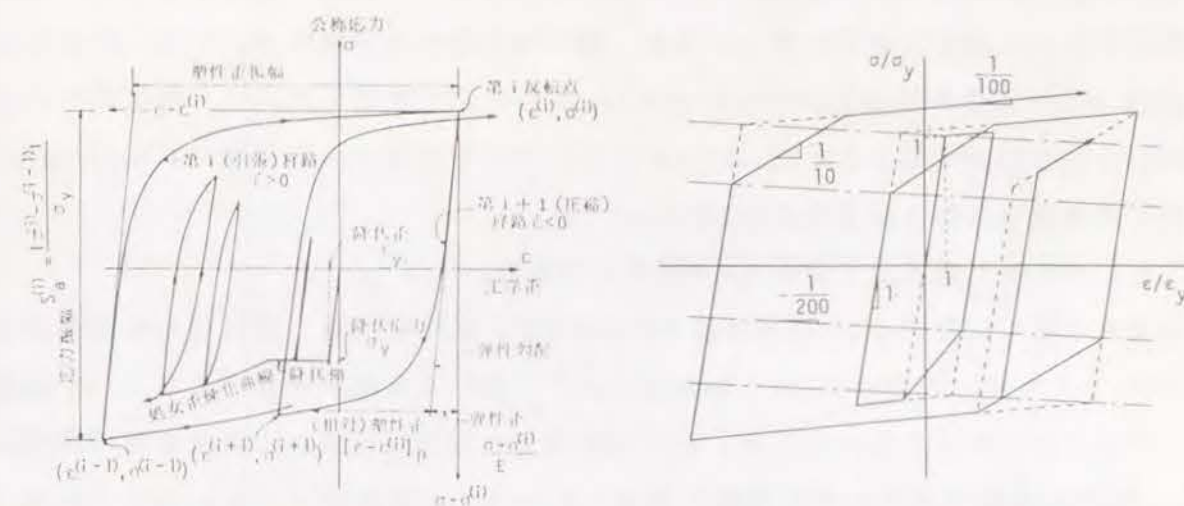
図-3.2は、荷重 P と頂点の鉛直変位 δ の関係を示している。3.2.1のエラスチカ問題同様、打ち切り誤差限界を1.0%とした場合について○印を、0.1%とした場合については・印を5ステップ毎に打ってある。打ち切り誤差の制御は、荷重 P と頂点の回転角 θ および下側部材中央の節点座標の3つの変位について行なっている。分岐点近傍で増分長は小さくなり、それ以外の範囲では、ある程度大きく増分長をとって計算を実行していることがわかる。□, ■印は、Britvec・Chilverの実験結果を文献[41]から読み取ってプロットしたものである。

3.3 弾塑性臨界挙動の予測解析と整合剛性選択過程

3.3.1 繰り返し軸方向载荷を受ける鋼部材の挙動

若林・野中・小城・山本による1971年の文献[43]に発表された実験で、繰り返し軸方向力を受ける部材が座屈現象なども含めて、圧縮力及び引張力による交互の弾塑性変形を通じて、どのような履歴現象を示すかを明らかにするために行なわれたものである。実験は、両端の材端条件を一方向を回転自由、それに直交する方向を固定とする治具を介して加力装置に装着された供試体に漸増変位振幅の繰り返し両振りを与える形式で行なわれた。繰り返し軸方向力を受ける単一鋼部材の実験は、その後も数多く行なわれ(例えば、文献[44~47])、また塑性ヒンジ理論に基づく解析的研究(例えば、野中の文献[48~51])や弾塑性ばねを用いたモデルによる解析(例えば、藤原[52]、柴田[53])などが行なわれている。一次元有限要素法による解析は藤本・和田ら[54]、五十嵐・井上・小川[55]、石田・森迫・大淵[16]などがある。

ここで解析対象とした実験は、文献[43]でSR4Cと名付けられた細長比が40のものであり、五十嵐らの文献[55]、石田らの文献[16]でも解析対象とされている。



(a) 非定常履歴応力ひずみ曲線 [58]

(b) 区分線形化応力ひずみ関係 [57]

図-3.3 鋼材の応力ひずみ関係モデル

断面形状ならびに部材長を図-3.4中に示す。解析は対称性を考慮して部材長を1/2の片持ち梁とし、自由端に横方向変位が部材長の1/10000となるような初期不整横力を導入して行なった。要素数は10で、均等に分割している。部材断面モデルは五十嵐・井上・小川の4点モデル[55, 56]である。鋼材の応力ひずみ関係モデルは、ここでは図-3.3(b)に示す柴田の区分線形化応力ひずみ関係モデル[57]を用いたが、さらに高精度の挙動予測が要求される場合には、図-3.3(a)に示す中村恒善・鎌形・小坂の非定常履歴構成則[58]

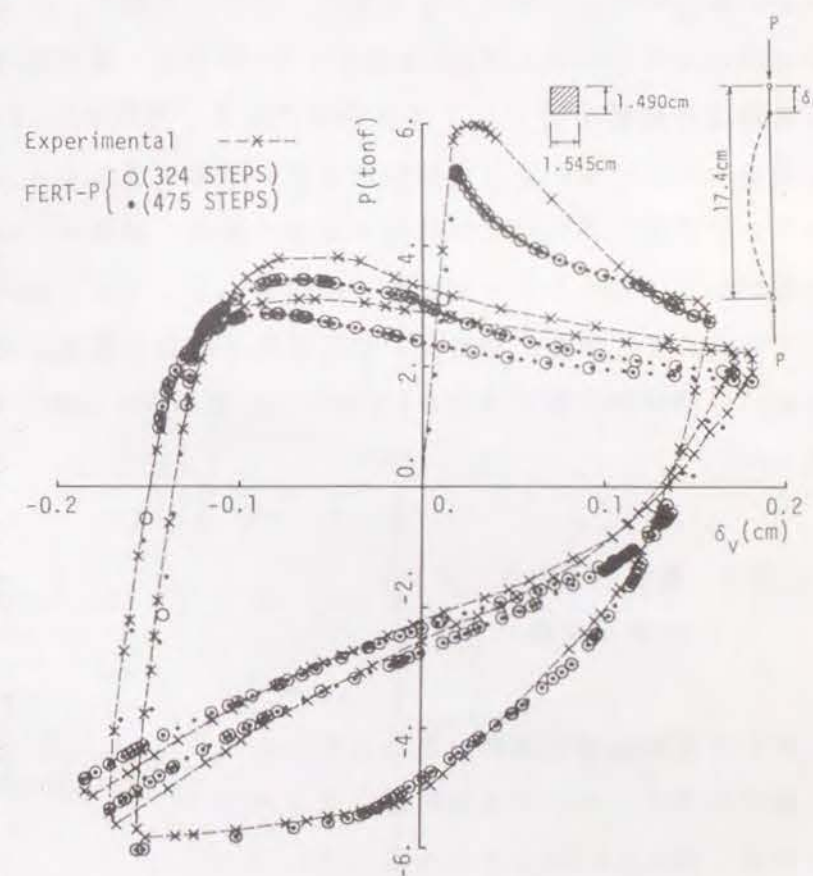


図-3.4 繰り返し軸方向载荷をうける鋼部材の挙動の解析

のような曲線形の応力ひずみ関係を用いるのが望ましい。増分摂動法はそのような非線形応力ひずみ関係の利用に際し、なお一層その有用性を発揮する。なお、その場合は式(2.37)の表現が異なる。図-3.3(b)の応力ひずみ関係において、降伏応力は文献[43]の引張試験結果より 2.33 tonf/cm^2 とし、ヤング係数は公称値の 2100 tonf/cm^2 とした。制御変数は軸方向変位 δ_v である。

なお、解析した繰返し回数は2.5回までである。

軸力 P と軸方向変形 δ_v の関係を図-3.4に示す。図中○印は、打ち切り誤差限界を1.0%としたもの、・印は0.1%としたFERT-Pによる解析結果であり、いずれも全ステップがプロットされている。打ち切り誤差の制御は荷重 P 、部材中央の横変位 δ_H 、前増分段階で最大ひずみ速度を経験したフランジ要素のひずみについて行なった。×印で示される実験値は、文献[43]に掲載されていたものを読み取ってプロットした。

文献[16]に示した従来のFERTによる解析結果よりはるかに良い予測結果が得られている。ただし、そこでは等価サンドイッチ断面、バイリニア応力ひずみ関係モデルが用いられている。文献[16]の $P-\delta_v$ 関係は、適当な増分長を設定するまでに数回の準備試行解析を行なって得た結果である。文献[55, 56]の五十嵐・井上・小川の解析結果に比しても、より実験結果に近い予測を得ている。○印内に・印がプロットされている点は、応力ひずみ関係における降伏、除荷などの剛性係数変更点によって増分長が決定されたステップである。除荷によって増分長が決定されたステップも存在している。ここでも、増分長の自動決定が有効に機能していることが、理解される。なお、計算時間は誤差限界を1.0%とした解析が4.59秒、0.1%とした解析が6.67秒であった。

3.3.2 弾塑性三角ラーメンの 分岐後挙動

非対称分岐問題の解析対象とした3.2.2項の三角ラーメンの2部材の上下フランジが、図-3.5に示すようなバイリニア応力ひずみ関係に従うと仮定し、初期降伏応力 σ_y を $10000, 30000 \text{ lb/in}^2$ とした解析を行なった。打ち切り誤差限界は

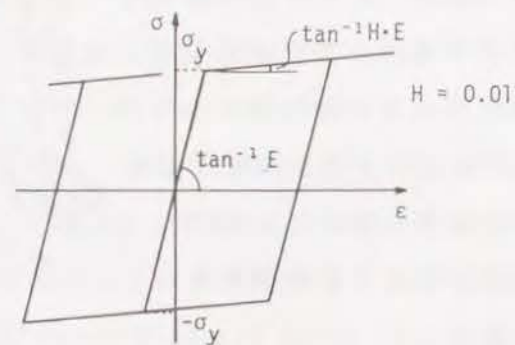
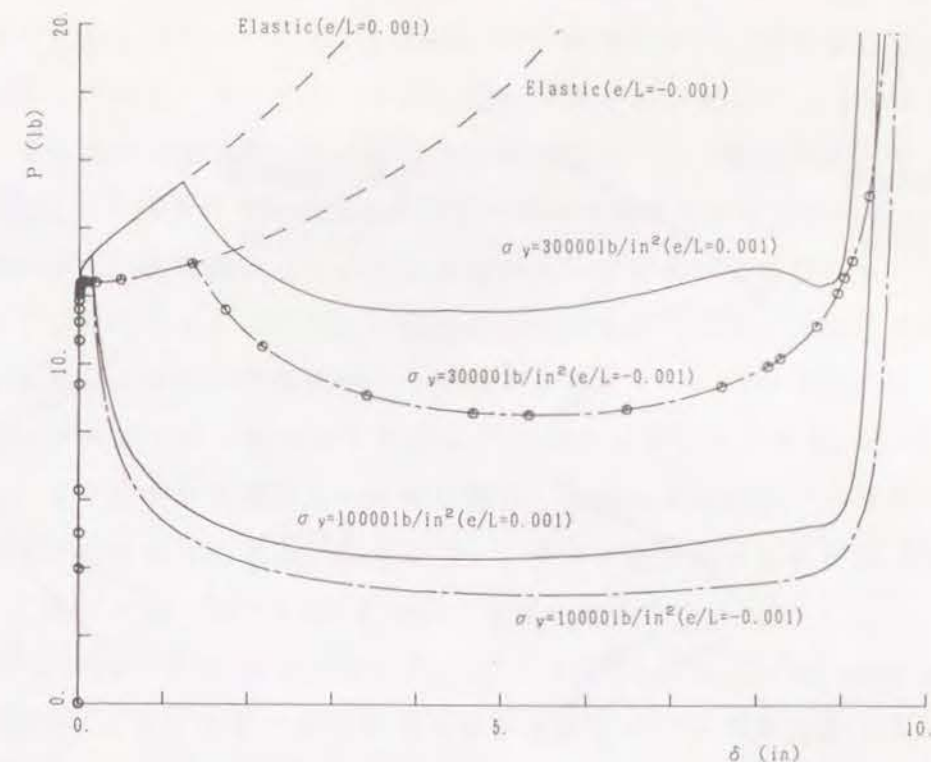
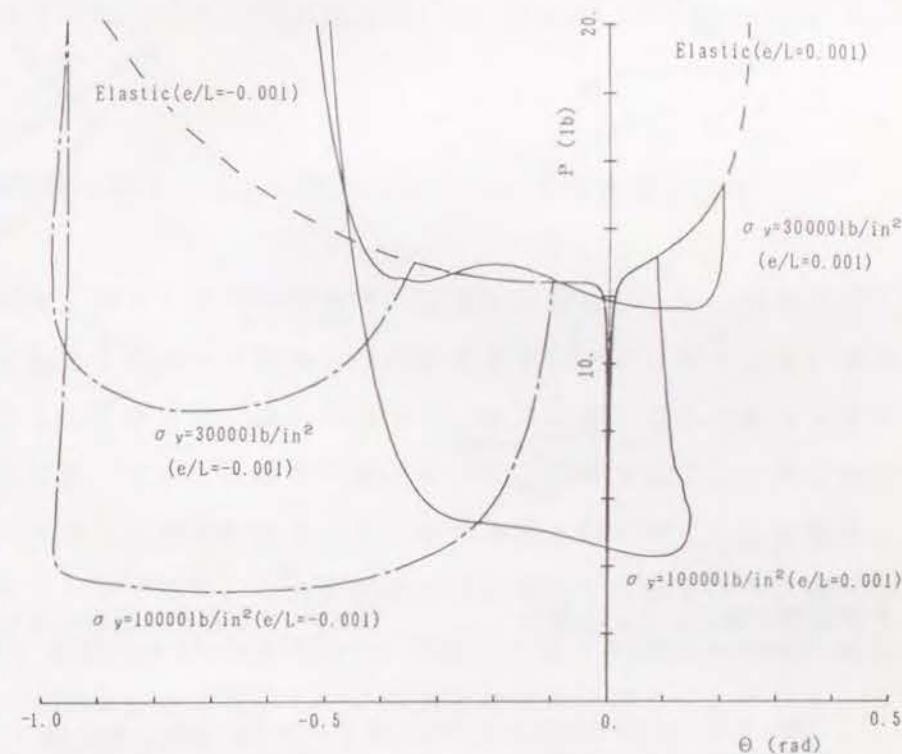


図-3.5 バイリニア応力ひずみ関係



(a) $P-\delta$ 関係



(b) $P-\theta$ 関係

図-3.6 弾塑性三角ラーメンの分岐後挙動の解析

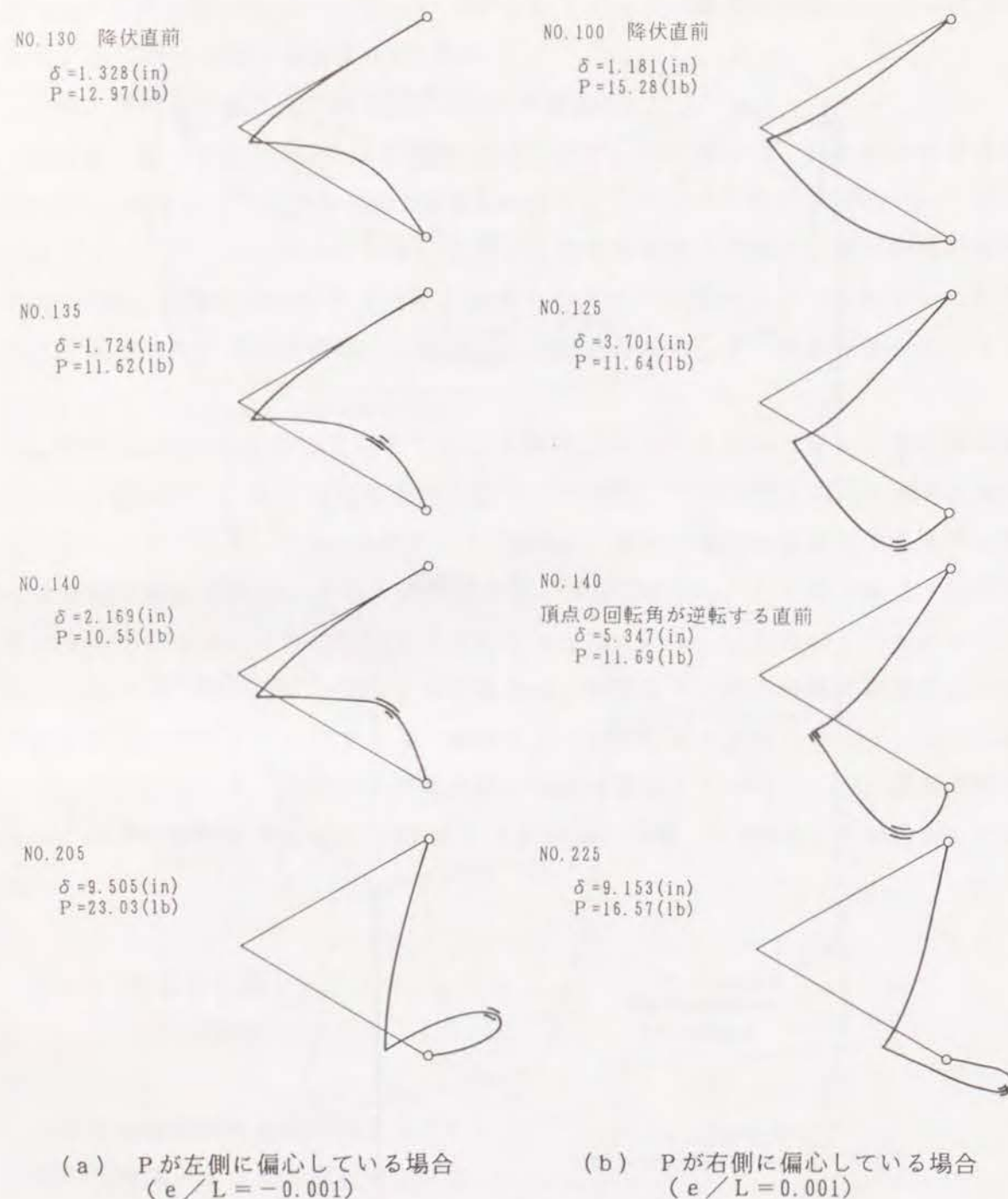


図-3.7 $\sigma_y = 30000 \text{ lb/in}^2$ の三角ラーメンの変形と塑性域

1.0%である。図-3.6(a)は図-3.2同様、 $P-\delta$ 関係を、(b)図は、 P と頂点の回転角 θ の関係を示している。 $\sigma_y = 30000 \text{ lb/in}^2$ で荷重 P が、左側に偏心している場合の $P-\delta$ 関係1例について5ステップ毎に○印を打っている。 $\sigma_y = 30000 \text{ lb/in}^2$ の場合の変形と塑性域の状況を図-3.7に示す。変形とラーメン幾何形状のスケールは同一で、部材に沿って描かれている線分が塑性フランジ要素を表わしている。サンドイッチ断面であるので、材軸線のどちら側にあるフランジ要素が塑性化しているかをこの表現で見ることができる。どちらに P が偏心している場合でも、降伏要素が現われると、一端 P は減少するが、変形が進むと再び P は増大する。これは図-3.7の変形図から上側部材が伸直に引っ張られる状況に近づいていることによる。図-3.6(b)の右側に偏心して P がかかる場合の $P-\theta$ 曲線は、最初の進行方向から降伏が生じるとほぼそのときの θ を保ったまま、 P は減少し、やがて逆方向に回転が生じる経路を描いている。このことは、図-3.7の変形図でも確かめられる。

図-3.6および図-3.7に示した解析は、200から230ステップで約9秒の計算時間であった。文献4)にFERT-Bで同様の解析を行なった結果を発表している。このときは3.2.1項のエラスチカ問題のようにステップ数を減らせるよう増分刻み幅の選択に関する試行準備計算を十分に行なっていないが、解析を打ち切った $\delta = 3.0 \text{ in}$ 付近までかなり小さい増分刻み幅を採用し、30000ステップ、230秒あまりの計算時間を要した。

3.3.3 弾塑性三角ラーメンの解析における整合剛性選択過程

前項の弾塑性三角ラーメンの解析で、左側に P が偏心している場合に、ひずみ速度が構成則に矛盾するフランジ要素の剛性係数を単にそのひずみ速度に適合する剛性係数に変更するという整合剛性選択過程では、剛性係数の組み合わせの選択が堂々巡りに陥り、解析を続行することが不可能となった。この対策として第2章で提案した剛性選択アルゴリズムを導入したところ、妥当と思われる剛性係数を難無く選択し、解析を続行することができた。この整合剛性選択過程の詳細を以下に述べる。

図-3.8は、部材の $\sigma_y = 30000 \text{ lb/in}^2$ で鉛直荷重 P が頂点の左側に偏心している場合の下材のフランジ要素が選択している剛性係数の状況を示している。黒く塗ったフランジ要素は、塑性剛性係数を選択していることを示し、・は除荷によって弾性剛性係数を選択していることを示している。白いままのフランジ要素は応力ひずみ状態点が初期弾性域にあり、弾性剛性係数を選択している。記号Yはその時点でフランジ要

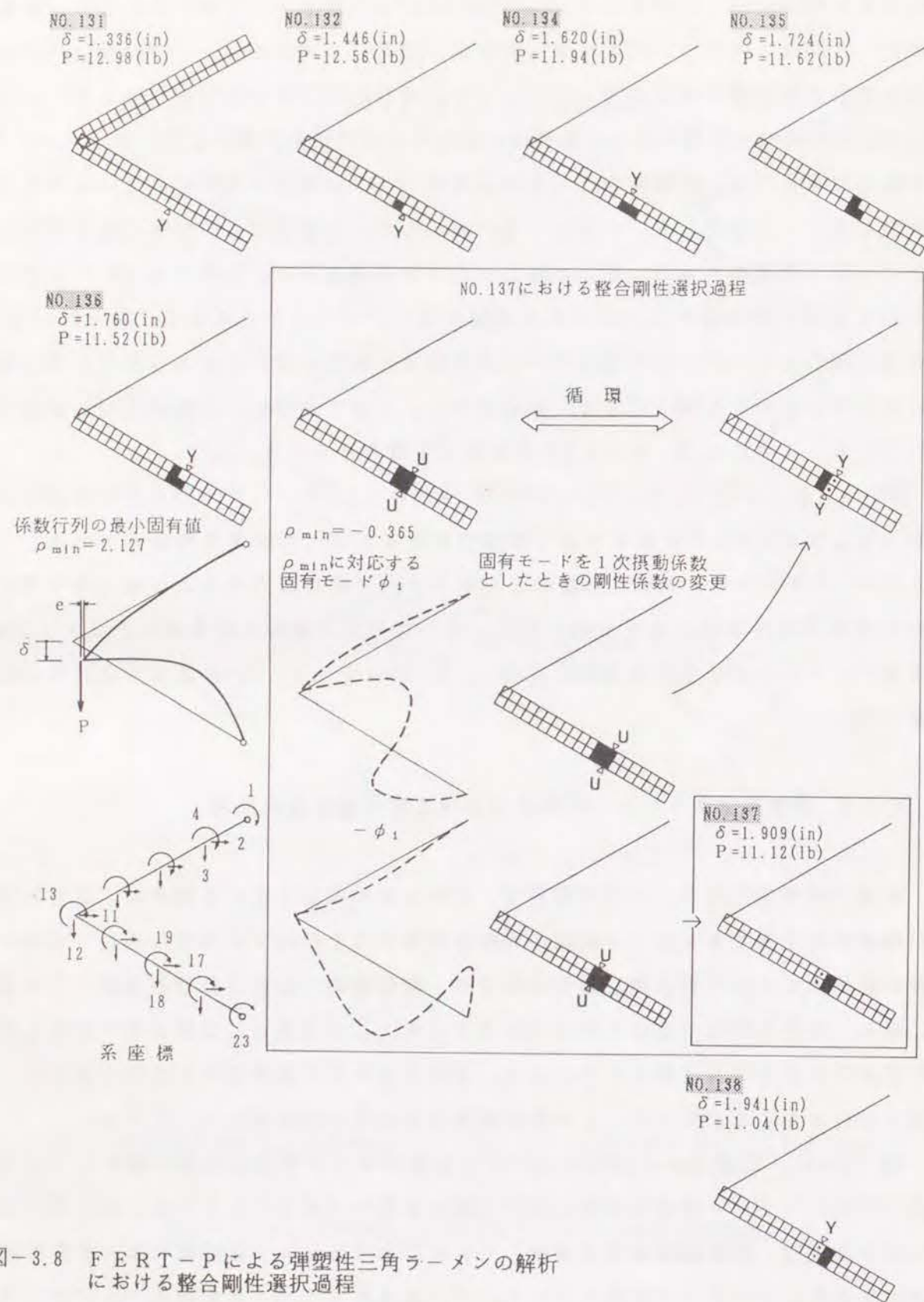


図-3.8 FERT-Pによる弾塑性三角ラーメンの解析における整合剛性選択過程

素が降伏したことを示し、Uは塑性剛性係数を選択していたフランジ要素がその剛性係数とひずみの1次摂動係数の符号が矛盾したことによって除荷指令を受けたことを示している。制御変数は頂点鉛直変位 δ で下向きを正としている。

136ステップ目終了時に、それまで下フランジ要素の2個および上フランジ要素1個の応力ひずみ状態点が塑性経路上にあり、塑性剛性係数を選択して解析が行なわれてきたのに加えて、さらに上フランジ要素の1個が降伏ひずみに達した。したがって、137ステップの最初の剛性係数の組み合わせの候補として、4つのフランジ要素が塑性剛性係数をとる組み合わせが選択される。その結果、系方程式の係数行列の固有値のうち1つが負となる。

第2章で提案した剛性選択アルゴリズムを使用しない場合には、4つのフランジ要素が塑性剛性係数をとるとしてひずみの1次摂動係数を求めると、それらの4つのフランジ要素のうち右側2つのフランジ要素のひずみの1次摂動係数の符号が塑性剛性係数をとった場合の構成則と矛盾する。それらのフランジ要素を除荷として弾性剛性係数に変更してひずみの1次摂動係数を求めると、再び除荷とした2つのフランジ要素のひずみの1次摂動係数の符号と剛性係数とは矛盾し、塑性剛性係数を選択することを要求する。こうして剛性選択過程は堂々巡り、すなわち循環剛性選択過程に陥る。この過程は図-3.8のNO.137中の白抜き矢印で示される。

第2章2.5節で提案したアルゴリズムを適用する。4つのフランジ要素が塑性剛性係数をとる組み合わせを選択したとき、系方程式の係数行列の固有値のうち1つが負となる。この負の固有値に対応する固有ベクトルを求める。この固有ベクトルの正負の2つモードをNO.137中に破線で示した。それぞれのモードを系座標変位の1次摂動係数として、フランジ要素のひずみの1次摂動係数を計算し、それに適合する剛性係数の選択指令を破線で示したモードの隣に示した。図中、上に描かれたモードからは、4つのフランジ要素のうち右側2つのフランジ要素の剛性係数を除荷として弾性剛性係数に変更する指令が発せられる。一方、下に描かれたモードからは、左側2つのフランジ要素の剛性係数を除荷として弾性剛性係数に変更する指令が発せられる。固有モードのうち最大絶対値となる成分は、下弦材中央の鉛直方向座標(第18系座標)であり、制御変数をこの第18系座標変位に変更する。上に描かれたモードで選択された剛性係数の組み合わせを採用し、第18系座標変位の負の方向に増分を与え、他の系座標変位の1次摂動係数を求める。それらからフランジ要素のひずみの1次摂動係数を計算すると、除荷とした2つのフランジ要素のひずみの1次摂動係数の符号と剛性係数が矛盾し、塑性剛性係数を選択することが要求される。したがって、最初の剛

性係数の組み合わせに戻り、循環剛性選択過程に陥ることが確認される。一方、下に描かれたモードで選択された剛性係数の組み合わせを採用し、第18系座標変位の正の方向に増分を与えた場合には、フランジ要素のひずみの1次摂動係数と剛性係数が矛盾無く整合する。したがって、137ステップはこの剛性係数の組み合わせを採用して算定される。

3.3.4 弾塑性門形ラーメンの解析における整合剛性選択過程

第2章で提案した剛性選択アルゴリズムを使用しない場合に循環剛性選択過程に陥る例をもう一つ示す。図-3.9は、上谷が文献[59]で発表した柱中央付近にヒンジを有する門形ラーメンの一方方向載荷時の層せん断力 Q と柱回転角 θ の関係である。文献[59]の解析結果は本論文第2章のFERT-Pによって得られたものである。解析対象とした門形ラーメンは、図-3.9中に示すように、十分に長い剛梁、剛体リブと4つの弾塑性ばねを連結した柱で構成されており、剛体リブの中央より微小距離 $e/2$ だけ上方にヒンジが設けられている。各柱の柱頭には一定の鉛直荷重 W が作用している。

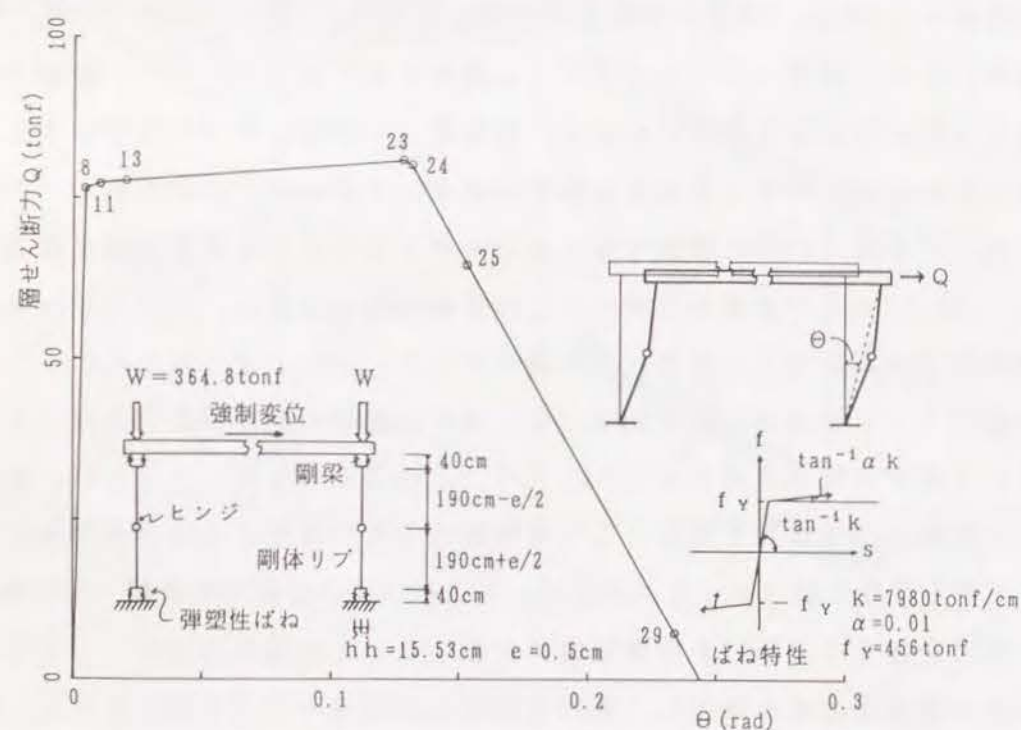


図-3.9 柱にヒンジを有する門形骨組の一方方向載荷時の層せん断力-柱回転角関係

ばねは図-3.9中に示す線形ひずみ硬化特性に従う。図-3.9の $Q-\theta$ 曲線上の数字は何回目の増分ステップであるかを示している。

図-3.10にばねが選択している剛性係数の状況を示す。ばねを図-3.8に示したように1つのフランジ要素として示す。したがって、記号等は図-3.8と同じである。制御変数は梁の水平方向変位で右向きを正としている。

23ステップ目終了時に、それまで左右柱の圧縮側ばね4個の力・伸縮状態点が硬化経路上にあり、塑性剛性係数を選択して解析が行われてきたのに加えて、さらに右側底部の引張側ばねが降伏変位に達する。したがって、24ステップの最初の剛性係数の組み合わせの候補として、5つのばねが塑性剛性係数をとる組み合わせが選択される。その結果、系方程式の係数行列の固有値のうち1つが負となる。

第2章で提案した剛性選択アルゴリズムを使用しない場合には、5つのばねが塑性剛性係数をとるとして伸縮の1次摂動係数を求めると、それらの5つのばねのうち右側柱底部2つのばね伸縮の1次摂動係数の符号が塑性剛性係数をとった場合の構成則と矛盾する。それらのばねを除荷として弾性剛性係数に変更して伸縮の1次摂動係数を求めると、再び除荷とした2つのばねの伸縮の1次摂動係数の符号と剛性係数とは矛盾し、塑性剛性係数を選択することを要求する。こうして剛性選択過程は堂々巡り、すなわち循環剛性選択過程に陥る。この過程は図-3.10のN0.24中の白抜き矢印で示される。

第2章2.5節で提案したアルゴリズムを適用する。5つのばねが塑性剛性係数をとる組み合わせを選択したとき、系方程式の係数行列の固有値のうち1つが負となる。この負の固有値に対応する固有ベクトルを求める。この固有ベクトルの正負の2つモードをN0.24中に破線で示した。それぞれのモードを系座標変位の1次摂動係数として、ばねの伸縮の1次摂動係数を計算し、それに適合する剛性係数の選択指令を破線で示したモードの隣に示した。図中、上に描かれたモードからは、このアルゴリズムを使用しない場合に循環剛性選択過程に陥ったときと同様、5つのばねのうち右側柱底部2つのばねを除荷として弾性剛性係数に変更する指令が発せられる。一方、下に描かれたモードからは、逆に5つのばねのうち右側柱底部2つのばねを除いたばねを除荷として弾性剛性係数に変更する指令が発せられる。固有モードのうち最大絶対値となる成分は、右側柱ヒンジの水平方向座標（右向き正）であり、制御変数をこの座標変位に変更する。上に描かれたモードで選択された剛性係数の組み合わせを採用し、制御座標変位の負の方向に増分を与え、他の系座標変位の1次摂動係数を求める。それらからばねの伸縮の1次摂動係数を計算すると、除荷とした2つのばねの伸縮の1

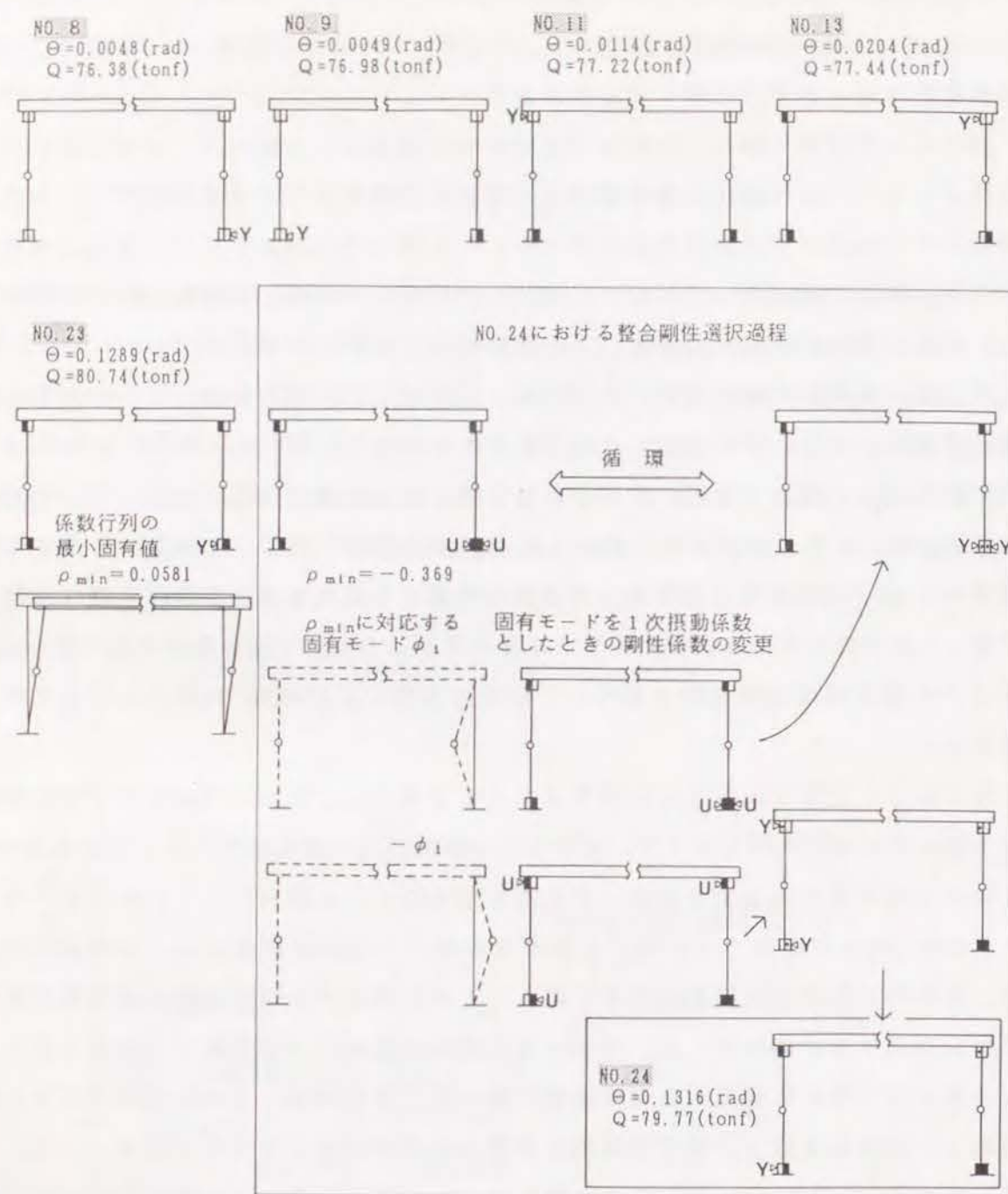


図-3.10 FERT-Pによる柱にヒンジを有する門形骨組の解析における整合剛性選択過程

次摂動係数の符号と剛性係数とが矛盾し、塑性剛性係数を選択することが要求される。したがって、最初の剛性係数の組み合わせに戻り、循環剛性選択過程に陥ることが確認される。一方、下に描かれたモードで選択された剛性係数の組み合わせを採用し、制御座標変位の正の方向に増分を与えた場合には、除荷とした3つのばねのうち左側柱のばねが塑性剛性係数を選択することを要求される。その要求を満たし、右側柱頂部のばねのみを除荷として、再び系座標変位の1次摂動係数を求め、ばねの伸縮の1次摂動係数を計算すると、すべてのばねの伸縮の1次摂動係数と剛性係数が矛盾無く整合する。したがって、24ステップはこの剛性係数の組み合わせを採用して算定される。

3.4 まとめ

本章では、第2章に述べた弾塑性骨組の静的臨界挙動予測解析プログラムFERT-Pの性能を検証するために、単純な弾性および弾塑性の臨界挙動解析例を示した。その結果以下の結論を得た：

- (1) 従来の骨組の複合非線形解析法では、増分刻み幅の設定に合理的な規範が示されておらず、また、材料非線形性の取り扱いに関する曖昧さから、解析対象ごとに幾度かの準備試行解析が必要であった。しかし、FERT-Pは、分岐点の極めて近傍を通る釣合経路の追跡であっても、何ら準備試行解析を行なうことなく、摂動係数の打ち切り誤差限界を指定するだけで、確実に遂行することができる。
- (2) 増分摂動法により定式化されたFERT-Pは、材料の応力ひずみ関係を除荷開始点の予測を含めてかなり精度よく追跡できるプログラムである。しかし、材料の構成則に整合する剛性係数の組み合わせを選択する過程が循環過程に陥る場合もあり、循環剛性選択過程から脱出する合理的アルゴリズムを具備する必要がある。
- (3) 循環剛性選択過程に陥る場合には、系方程式の係数行列が正定値でなくなることが確認された。また、第2章で提案した係数行列の負の固有値に対応する固有ベクトルを利用する整合剛性選択アルゴリズムが効果的であることが、2つの例題で実証された。

第4章 弾塑性骨組の臨界挙動の予測解析

4.1 序

本章では、まず、第3章で示した比較的単純な臨界挙動についてのFERT-Pによる予測解析例題に加えて、筋かい付鋼骨組の実験を対象とした解析結果を提示し、FERT-Pの予測性能が極めて高く、骨組構造物の実験を支援する高精度数値シミュレーションシステムとして十分使用できるものであることを実証する。ここで対象とした2層K型筋かい付鋼骨組の解析は、従来のFERTでは頻繁に循環剛性選択過程に陥るため、解析を遂行することが実質的に不可能であった。FERT-Pによる文献5), 10), 11)以外に、FERTのような有限要素系の解析法を用いて重層K型筋かい付鋼骨組の繰返し挙動の解析結果を公表している文献を本研究者は知らない。

次に、FERT-Pを用いた弾塑性骨組の新たな臨界挙動の予測解析例を呈示する。2層骨組の第1層の柱軸力比を一定に保持しながら骨組の柱頂部と第1層梁中央にそれぞれ作用する定鉛直荷重の割合を変えた一連の骨組群について、水平方向に定振幅の繰返し強制変位を与えたときの挙動を解析している。荷重比の値によってシェークダウン挙動と崩壊に至る挙動の2種類が存在し、両者を分ける荷重比の臨界値が存在することを見出している。

なお、本章の解析は、摂動係数3次までの計算で変位増分法によっている。数値計算は、京都大学大型計算機センターFACOM-VP200を使用した。

4.2 繰返し載荷される2層筋かい付鋼骨組の実験を対象とした

FERT-Pの予測性能の実証

一次元複合非線形有限要素法を用いた1層1スパンのK型筋違付鋼骨組の繰返し挙動の解析結果は、1972年の藤本・和田らの文献[54]に示されている。そこで解析対象とされた実験は藤本・北後らによるK型筋違付鋼骨組の実験[60]の一つである。藤本・和田らと同じ骨組を解析対象として、石田・森迫・大淵はFERTによる解析結果を文献16)に示している。さらに石田・森迫らは、FERTを用いて1層1スパン

のK型筋違付鋼骨組の筋かい材の細長比等をパラメータにした解析結果も発表している20), 23)。また、柴田・若林は、文献[61]に、部材を曲げには剛で軸方向には弾塑性伸縮する直線材と弾塑性ばねから成るとしてモデル化を行ない、藤本・和田らと同じ骨組を解析対象とした解析結果を示すとともに、若林・柴田らの一連の実験[62]を対象とした解析結果を提示している。この他にも、1層1スパンのK型筋違付鋼骨組の解析は、種々の解析モデルを用いて行なわれている(例えば、文献[63~65])。

しかし、これまでに重層K型筋かい付鋼骨組の繰返し挙動の解析結果を掲載している文献は非常に少なく、本研究者の知る2例[66, 67]の予測精度は、実験を行なう以前に、実験を効率よく実施するための予測という観点からは到底満足できるものとは言いがたい。このことは、複数部材が相次いで座屈するような挙動を確実に解析することの困難さを示唆している。

ここでFERT-Pによる解析の対象とした実験は、1985年に大阪大学五十嵐研究室で行なわれた2層筋かい付鋼骨組5体に関する繰返し実験[68]のうち筋かいが面内座屈するよう設計された骨組4体についての実験である。これらの実験のうち2層K型筋かい付鋼骨組を対象として、従来のFERTを用いた解析を試みたが、数多くの試行解析を行なっても、解析結果が十分収束していると確信できる増分刻み幅を決定することができず、また整合剛性選択過程は、しばしば循環に陥り、解析を続行することが不可能な状態となった。

4.2.1 解析対象骨組モデル

K型およびVK型筋かい付鋼骨組の荷重-変形挙動の差異を実験的に確認すること、また、これらの骨組の水平耐力の簡便な計算法の適用性を検討する目的で実施された実験である。試験体はK型2体、VK型3体の計5体で、各試験体は2層1スパン架構であり、VK型の1体(VK-BH-S)を除いて筋かいは構面内に座屈するように配されている。筋かい材が溶接H形である架構をBHシリーズと呼び、平鋼である架構をFBシリーズと呼んでいる。図-4.1にBHシリーズ試験体の概略形状を示す。FBシリーズの架構も筋かい材が平鋼であること以外は同一の形状である。表-4.1, 4.2に部材断面、使用材料の機械的性質を示す。柱・梁・筋かいの接合はすべて溶接接合である。試験体の柱脚は基礎梁に固定されたピン治具によって結合され、水平力は2台のオイルジャッキにより試験体頂部にPC鋼棒を介して交互に引張力として作用せられる。

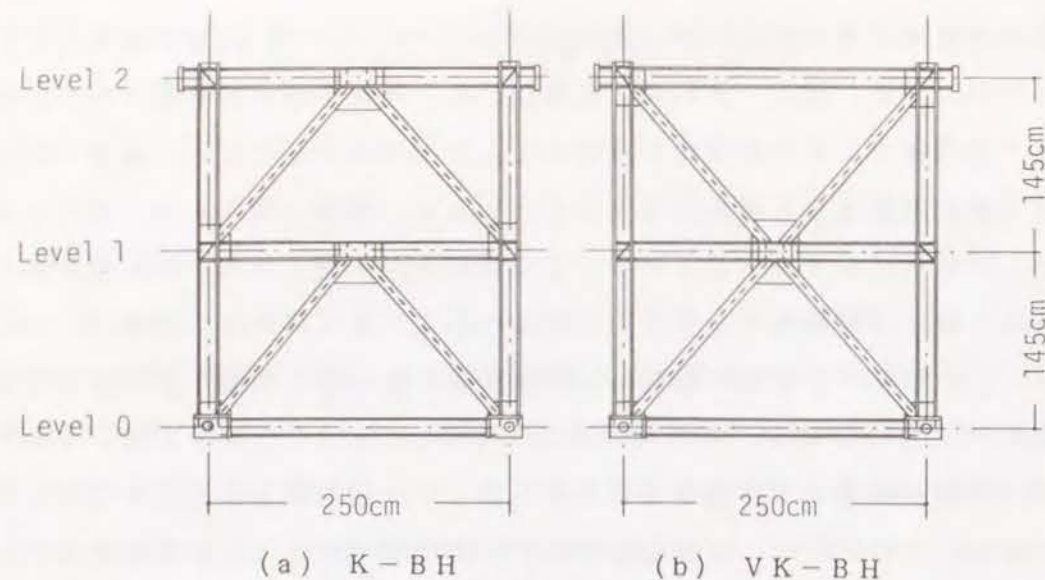


図-4.1 試験体の概略図

表-4.1 試験体の部材断面

試験体	柱	梁	筋かい
K-BH VK-BH VK-BH-S	H-150x150x7x9 $A=36.6\text{cm}^2$ $I=1510\text{cm}^4$	H-125x125x6.5x9 $A=27.2\text{cm}^2$ $I=774\text{cm}^4$	BH-80x80x6x6 $A=13.2\text{cm}^2$ $I^*=49.3\text{cm}^4$
K-FB VK-FB	H-200x200x8x12 $A=57.1\text{cm}^2$ $I=4270\text{cm}^4$	H-175x175x7.5x11 $A=47.4\text{cm}^2$ $I=2690\text{cm}^4$	FB-9x75 $A=6.39\text{cm}^2$ $I^*=0.4\text{cm}^4$

A: 断面積, I: 断面2次モーメント (I*: 弱軸まわりの値)

表-4.2 材料の機械的性質

試験片	Grade	σ_y (t/cm ²)	σ_u (t/cm ²)	伸び (%)
H-125x125x6.5x9	Flange Web	SS41 3.15 3.14	4.57 4.64	27 24
H-150x150x7x9	Flange Web	SS41 2.92 3.03	4.52 4.63	29 26
H-175x175x7.5x11	Flange Web	SS41 2.99 3.22	4.50 4.62	30 26
H-200x200x8x12	Flange Web	SS41 3.22 3.50	4.72 4.91	29 24
FB-9x75	SS41	3.09	4.55	28
Plate-6	SS41	3.07	4.25	28

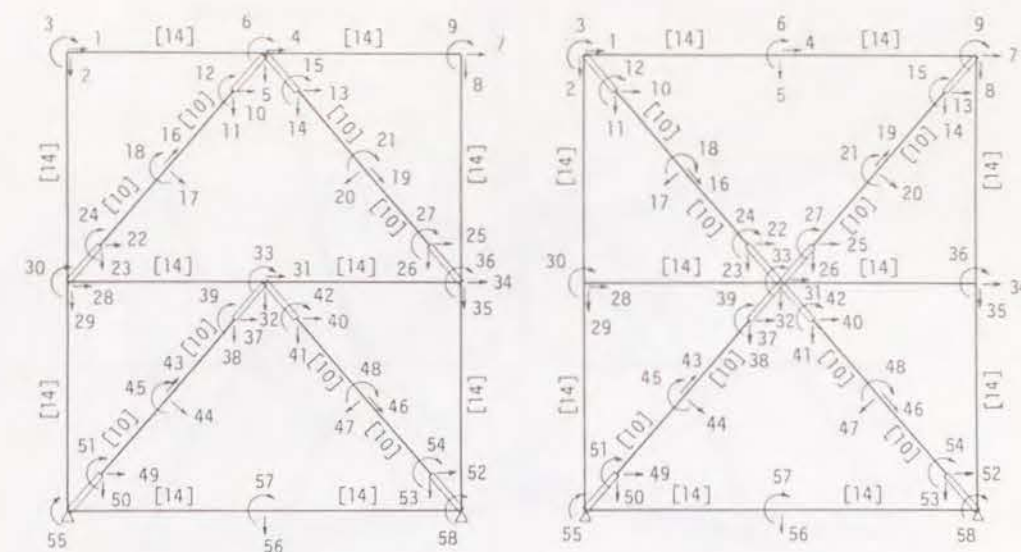


図-4.2 解析における系座標と自動分割による材の最大要素数

解析対象とした架構は、筋かいが構面内に座屈するように配された4体である。部材断面モデルおよび応力ひずみ関係モデルは、第3章3.3.1の鋼材で用いたモデルと同じであり、断面は4点モデル、応力ひずみ関係は区分線形化モデルである。ヤング係数は全ての材について2100tonf/cm²とし、降伏応力は柱、梁材については表-4.2のフランジ材の σ_y を採用し、筋かい材については同表から、BHシリーズでは3.07tonf/cm²、FBのシリーズでは3.09tonf/cm²とした。筋かい端部の接合プレート部はその詳細から各筋かいの両端30cmを1部材1要素とし、その4つの材料点の断面積をそれぞれ2倍とした。接合部はすべて剛接とした。解析で設定した系座標および自動分割による各節点間の材の最大要素数を図-4.2に示す。

4.2.2 解析結果

図-4.3は以下に現われる各変位情報量を示している。なお、打ち切り誤差の制御は水平力、全ての筋かいの中央の横方向変位および前増分ステップで最大ひずみ速度を経験した材料線要素のひずみについて行な

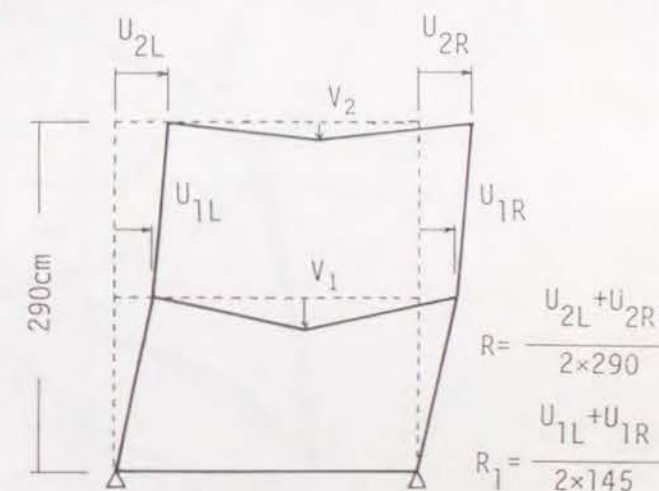
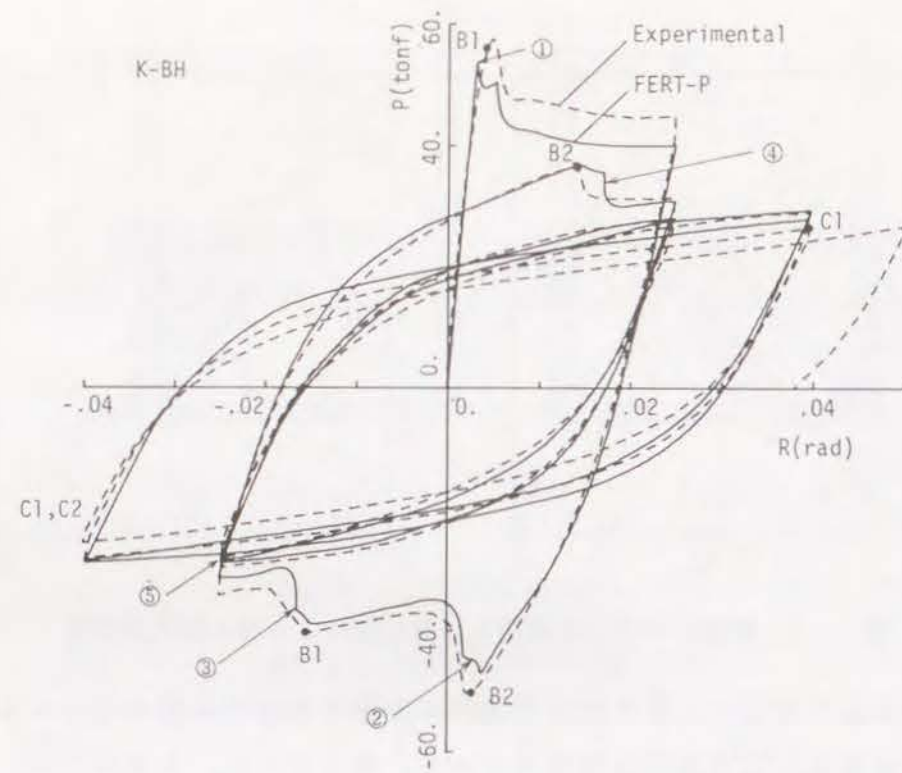
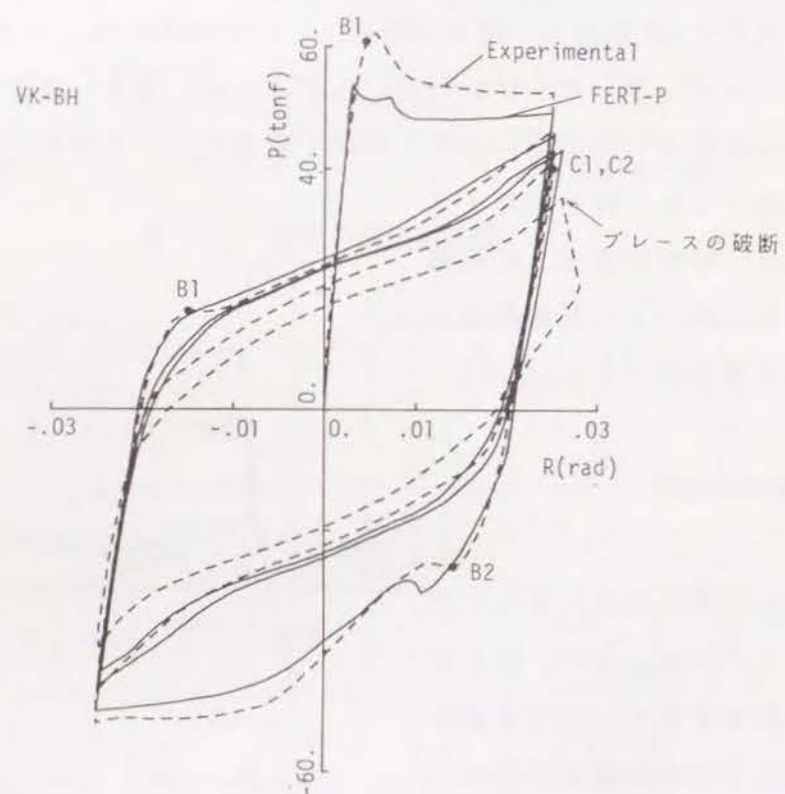


図-4.3 変位情報

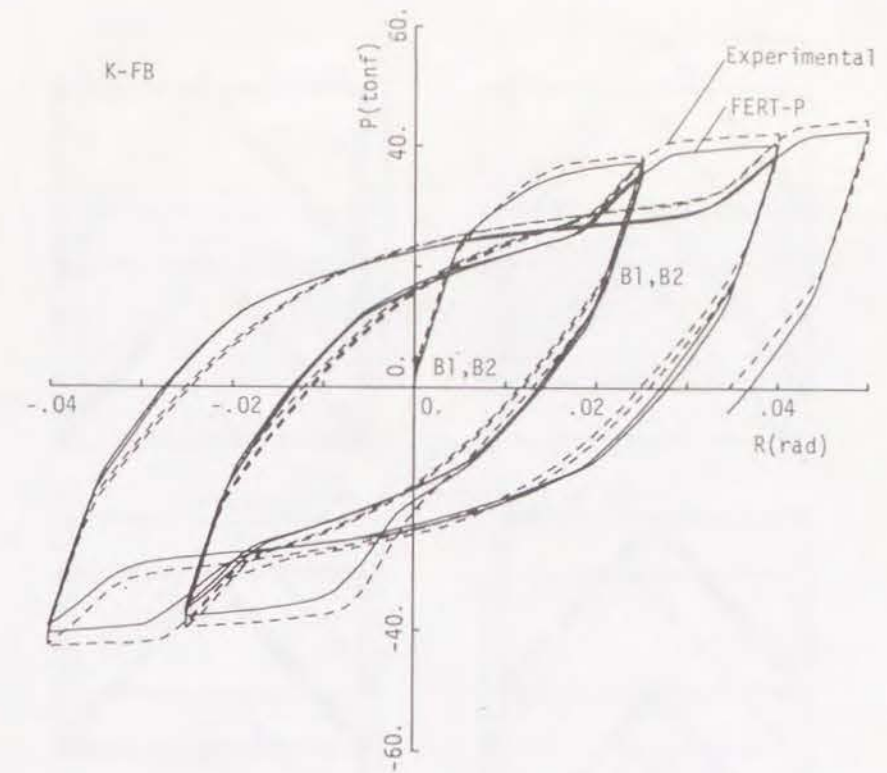


(a) K-BH

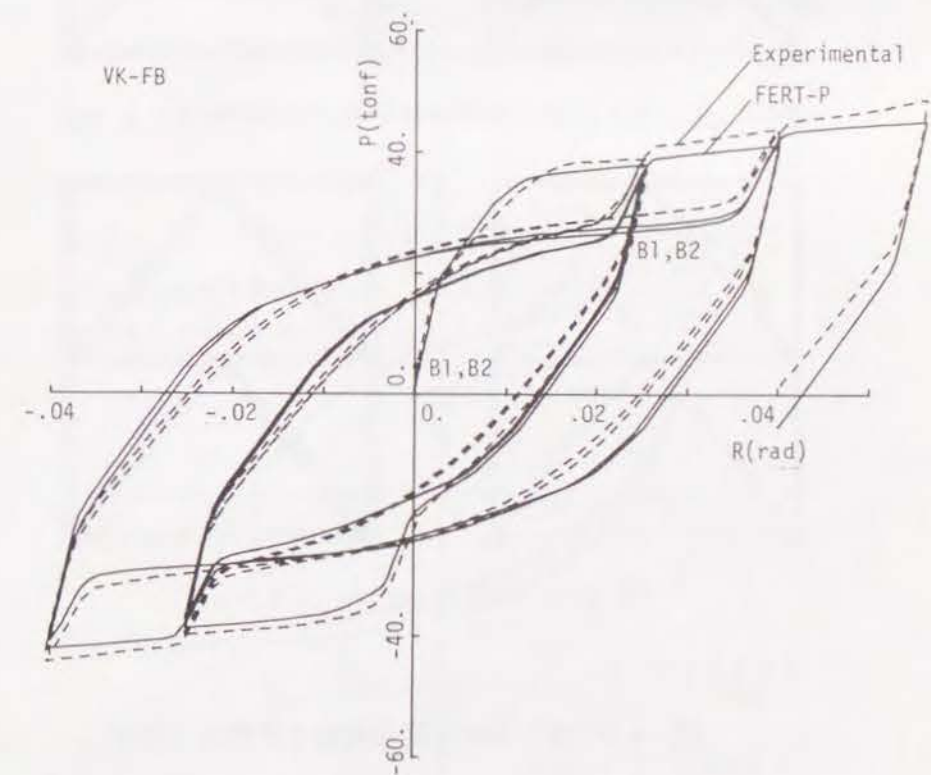


(b) VK-BH

図-4.4 水平力P-転倒角R関係

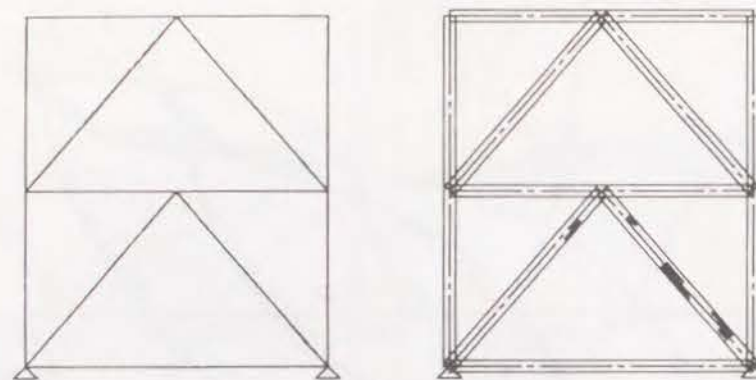


(c) K-FB

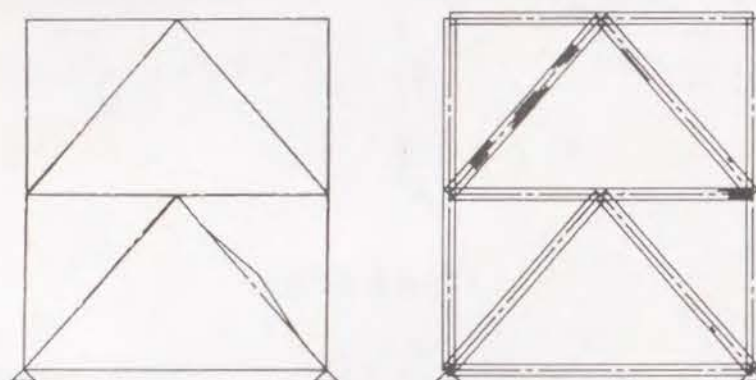


(d) VK-FB

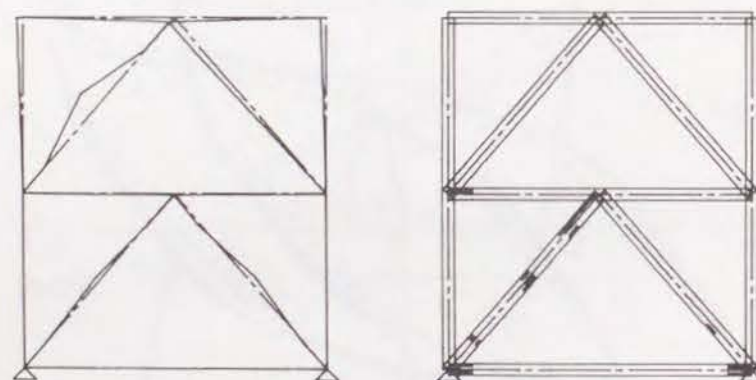
図-4.4 (つづき) 水平力P-転倒角R関係



① $R = 0.003140(\text{rad})$ $P = 53.61(\text{tonf})$

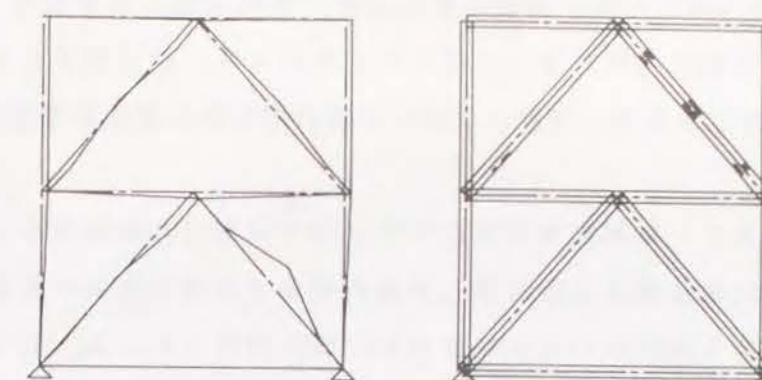


② $R = 0.003135(\text{rad})$ $P = 45.16(\text{tonf})$

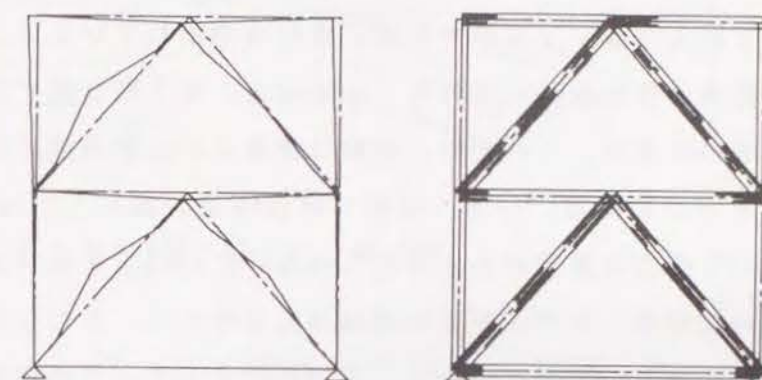


③ $R = -0.01598(\text{rad})$ $P = -36.21(\text{tonf})$

図-4.5 K-BHの変形概略と塑性域の状況



④ $R = 0.01717(\text{rad})$ $P = 33.42(\text{tonf})$



⑤ $R = -0.02500(\text{rad})$ $P = -28.58(\text{tonf})$

図-4.5 (つづき) K-BHの変形概略と塑性域の状況

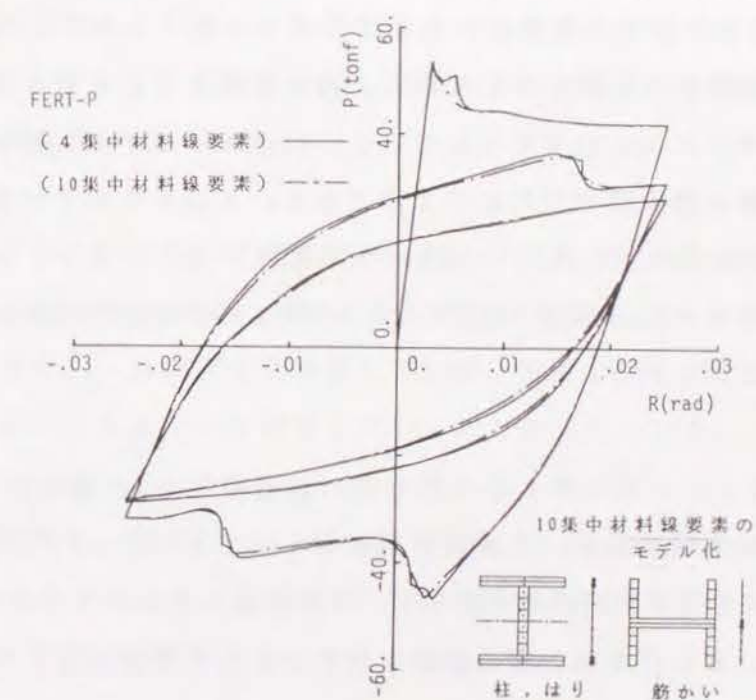


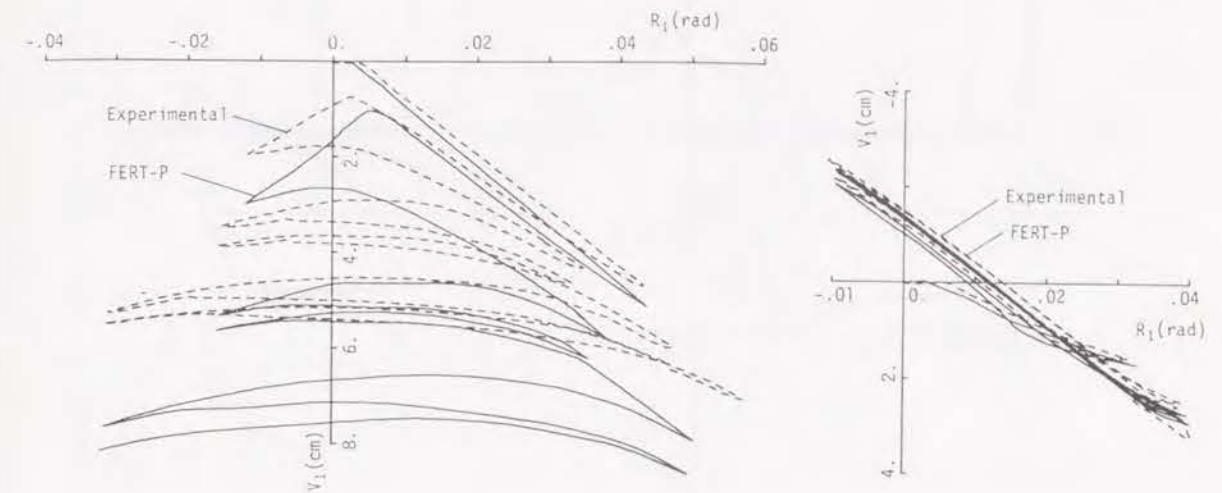
図-4.6 部材断面のモデル化による水平力P-転倒角R関係の比較 (K-BH)

い、その許容値を1.0%とした。制御変数は最初、骨組頂部の水平変位（第1系座標）とし、第2章の整合剛性選択アルゴリズムにしたがって、系方程式の係数行列が非正定値となると随時変更される。各筋かい材の中央の横たわみ変位が順次選ばれている。

図-4.4に水平力 P —転倒角 R 関係を示す。図中破線は実験結果を、実線は解析結果を示している。実験結果は大阪大学五十嵐研究室より提供されたものである。実験曲線上の・印の記号Bは筋かいに座屈波形が肉眼で観察された点、記号Cは筋かいの一部に亀裂が発生した点を示している。図-4.5に図-4.4(a)のK—BHに関する曲線上に付した①～⑤位置での変形状態と塑性域の状況を示す。変形図は節点の水平、鉛直移動点を直線で結んで描いたものである。変形は増幅していない。また、塑性域は部材成を材料線要素の付与面積に関わらず4等分し、黒く塗り潰すことで示した。ここで示した塑性域の状況は、それぞれ、実験で観察された座屈波形の発生を示唆するパターンであることがわかる。一方、解析では繰返し幅を $\pm 0.04\text{rad}$ としたときに実験結果に見られる耐力の漸減があまり見られない。(b)図VK—BHの解析結果でも3サイクル目の繰返しに伴う耐力の漸減は見られない。これらの耐力の漸減は筋かいの亀裂発生によるものと考えられる。その他BHシリーズの初期最大耐力を除いて、本解析は実験結果をかなり良好に予測していると言える。

図-4.6は、部材の断面を10個の材料集中点にモデル化して解析した P — R 曲線と4点モデルとの予測精度の比較を示している。図中実線は4点モデルによる結果を、一点鎖線は10点モデルによる結果を示している。10点モデルでも、筋かい端部の要素の材料点の付与面積は他の要素のその2倍である。4点モデルでは各筋かい座屈による曲線の尖点が現われた後、もう一つそのような点が見られるが、10点モデルでは各筋かい座屈後の第2の尖点は見られない。この第2の尖点は部材断面のモデル化によるものであることがわかる。

図-4.7に、BHシリーズの第1層の梁中央の鉛直変位 v_1 と層間変形角 R_1 の関係を示す。図中破線は実験結果を、実線は解析結果を示している。(a)図K—BHの第1層の梁中央の鉛直変位は実験結果に比して、解析結果の方がかなり大きく出ている。また、これは筋かい取り付け部の梁の補強を解析では全く考慮していないことによるものと考えられる。



(a) K—BHの第1層の v_1 — R_1 関係

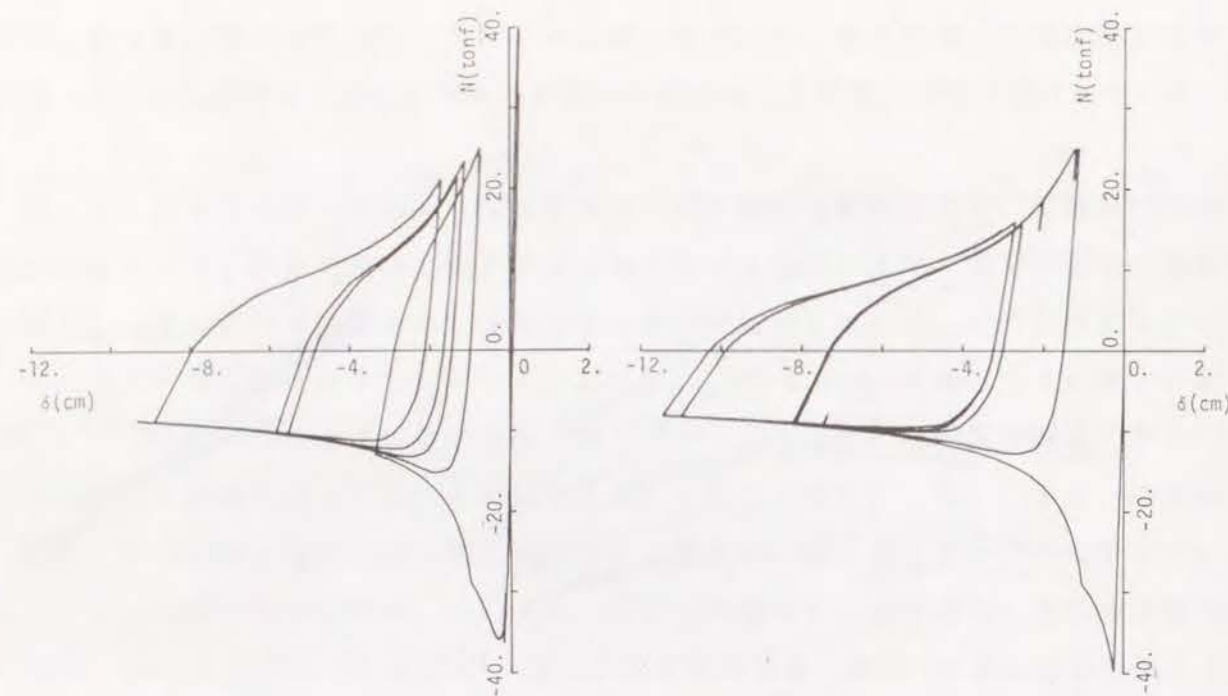
(b) VK—BHの第1層の v_1 — R_1 関係

図-4.7 梁中央の鉛直変位 v_1 と層間変形角 R_1 の関係

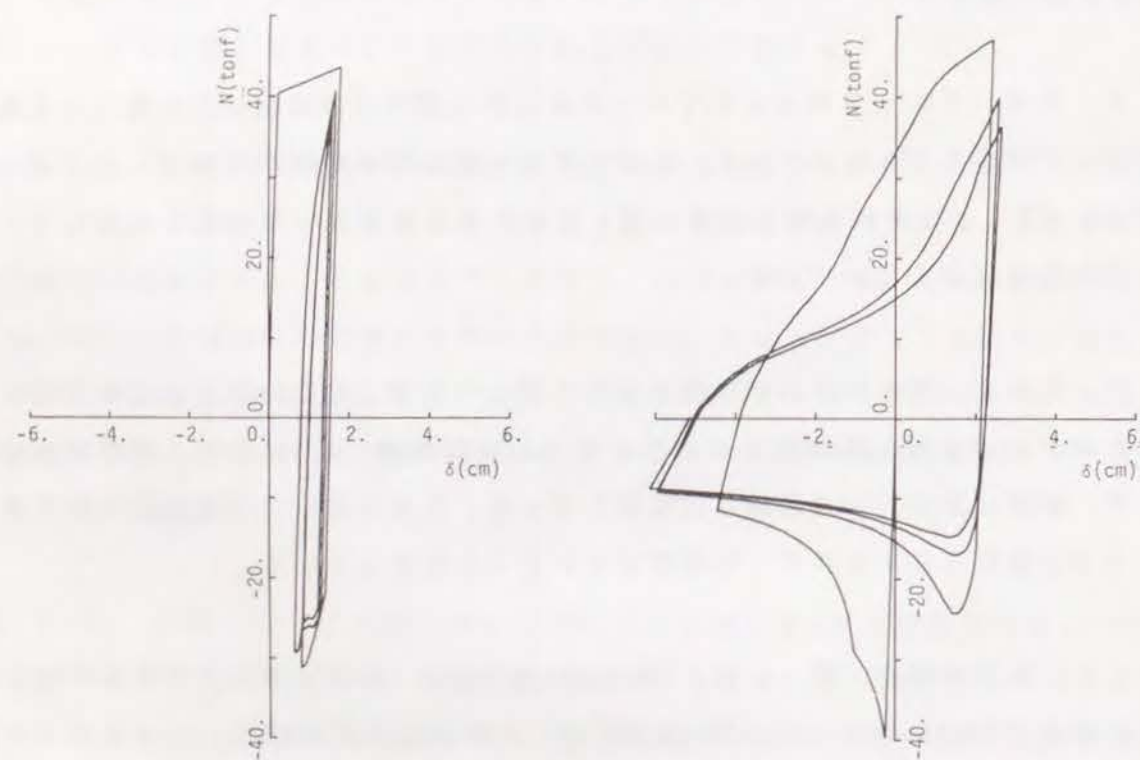
K—BH、VK—BHおよびVK—FBの第1層の2本の筋かいの軸力 N と軸方向変位 δ の関係を図-4.8に示す。前節でその一実験を予測解析対象とした若林らの実験[43,44]などの単材の軸方向繰返し実験に見られる N — δ 関係と比較して、妥当と思われる履歴を描いている。

柱、梁および筋かいにおいて塑性変形に関して消費される仕事を各部材種毎に総和したWPの繰返し転倒角 R に対する変化の状況を図-4.9に示す。図中実線は筋かいを、破線は梁を、一点鎖線は柱を示している。BHシリーズでは筋かいがFBシリーズでは梁が主にエネルギーを消費していることを示している。

なお、計算時間は、図-4.4(a)繰返し幅が $\pm 0.04\text{rad}$ までのK—BHに関する解析が最長で約30分であった。図-4.6に示した解析の計算時間は、4点モデルで約11分、10点モデルで約43分であった。

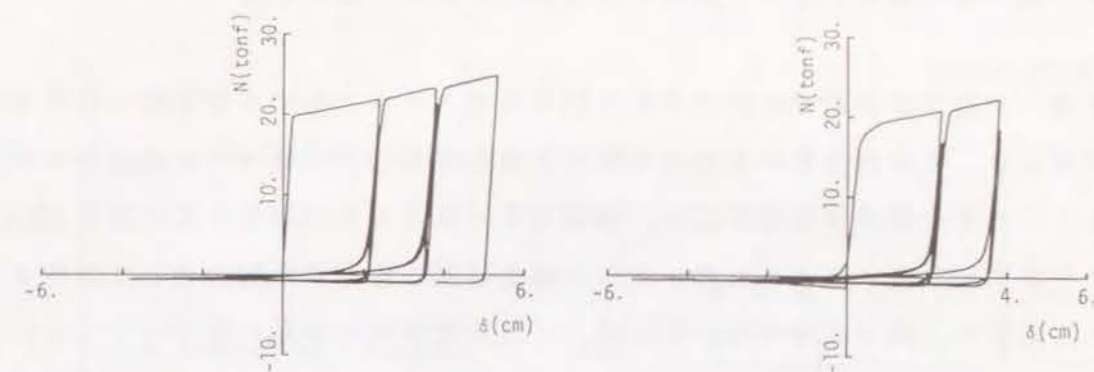


(a) K-BH



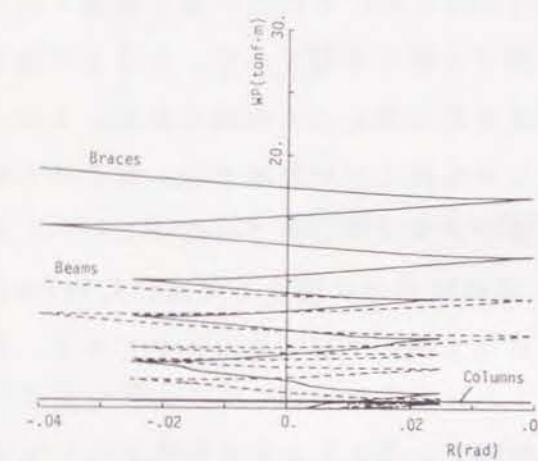
(b) VK-BH

図-4.8 第1層筋かいの軸方向力N-軸方向変位関係 δ

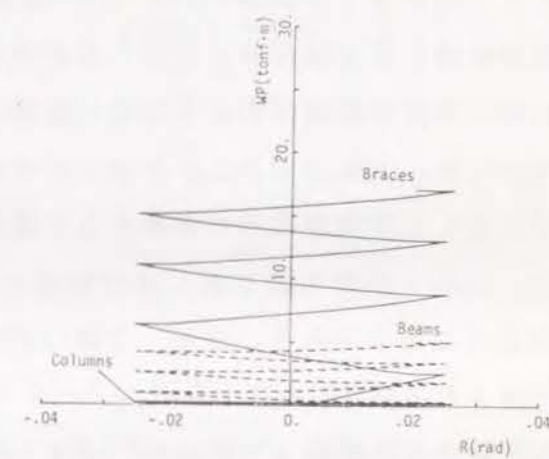


(c) VK-FB

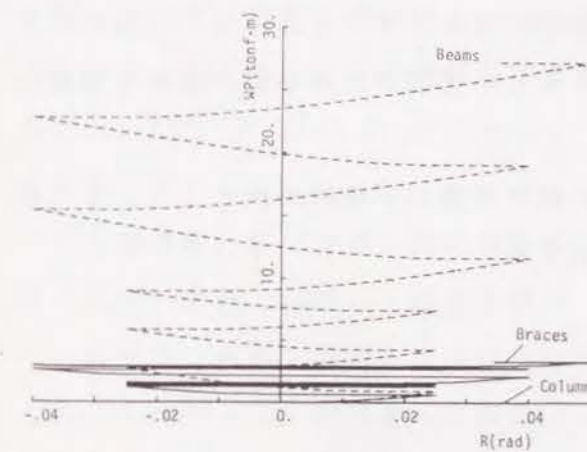
図-4.8 (つづき) 第1層筋かいの軸方向力N-軸方向変位関係 δ



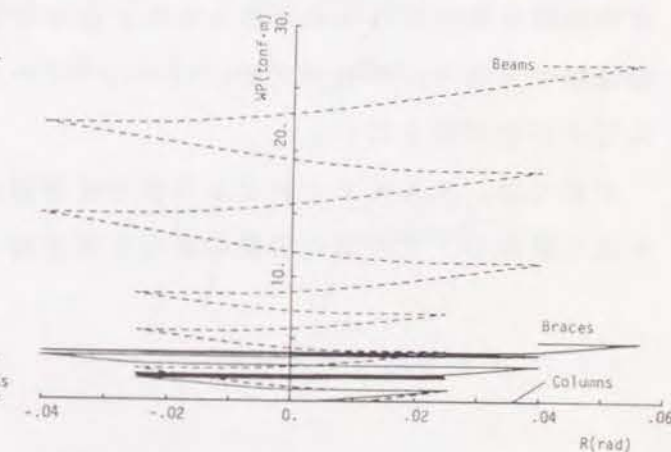
(a) K-BH



(b) VK-BH



(c) K-FB



(d) VK-FB

図-4.9 柱・梁・筋かいにおいて塑性変形に関して消費される仕事WPと転倒角Rの関係

4.3 繰返し載荷によって誘発される弾塑性骨組の臨界挙動

建築物の使用予定期間中に想定される限界荷重とそれに対する建築物の応答量の限界を明確にし、その建築物の安全度を限界荷重と応答限界に基づく終局耐力に対して付与しようとする限界状態設計法が、鋼構造を対象として1990年2月に規準(案)[37]として日本建築学会より示された。そこで構造要素の終局限界耐力として設定されている応答限界は、概ね従来の設計法同様、一方向載荷時の挙動に基づいている。この点について、1989年度の日本建築学会大会の研究協議会において、上谷は繰返し載荷の下での劣化現象の存在を紹介し、繰返し載荷時の限界挙動の解明の必要性を指摘している[69]。そこで紹介された繰返し載荷時の限界挙動の一つは、中村恒善・上谷宏二らによって実験的[70,71]、理論的[72]に明らかにされた片持ち鋼梁-柱の漸増振幅繰返し載荷時の構面外変形の発生に関する限界挙動であり、これまで知られていた横座屈振幅限界より小さい振幅で構面外変形が発生する現象である。また、もう一つは、上谷が同大会で発表した中央にヒンジを持つ柱材の繰返し載荷時の挙動が必ずしも単調載荷時の挙動からは単純に把握できない例[59]である。これらの挙動は、上谷・中村の繰返し曲げを受ける梁-柱の臨界点に関する理論[73,74]から予測されるものである。なお、文献[59]の解析には本研究で提示されたFERT-Pが使用されている。

構造物の安全性がより理論的、あるいは量的な評価に移行していくためには、現実の構造物の挙動予測が十分になされ、チェックすべき事項に可能な限り漏れのない状況が提供されていなければならない。限界状態設計法の推進のためには、上谷が研究協議会で指摘し、中村が文献[14]で述べている新しい種類の臨界挙動の探索も積極的になされねばならない。

本節では、FERT-Pによる弾塑性骨組の臨界挙動の予測解析例として、この繰返し載荷の下での劣化現象の新たな例を提示する。

4.3.1 解析骨組モデル

図-4.10に解析対象とした2層1スパン骨組を示す。水平力を加える前の状態で、第1層の左右の柱軸力比が共に40.0%となるように定鉛直荷重 P_C 、 P_B の割合を変えた骨組モデルについて解析を行なった。梁および柱の断面積 A 、断面2次モーメント I を表-4.3に、全塑性モーメント M_p 、ならびに柱の降伏軸力 N_p とともに示す。部

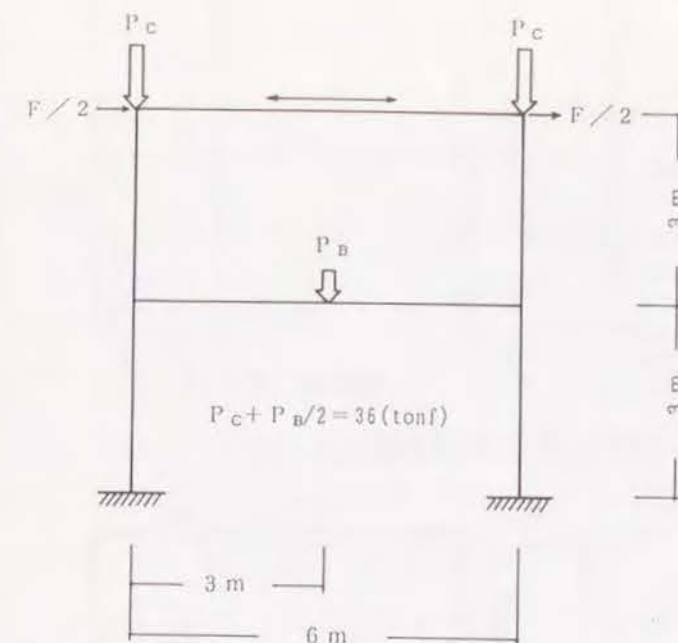


図-4.10 解析対象モデル骨組

表-4.3 梁・柱の断面性能

	梁	柱
A 断面積 (cm^2)	40.00	30.00
I 断面2次 モーメント(cm^4)	4000.	1198.
M_p 全塑性モーメント ($\text{tonf}\cdot\text{m}$)	12.00	5.69
N_p 降伏軸力 (tonf)	—	90.00

材断面は等価サンドイッチ断面にモデル化している。応力ひずみ関係は図-4.11に示すバイリニア関係であるとし、初期降伏応力 σ_y を $3.0\text{tonf}/\text{cm}^2$ 、弾性および除荷時の剛性係数 E を $2100\text{tonf}/\text{cm}^2$ 、ひずみ硬化係数 H を 0.005 とした。

図-4.12に、定鉛直荷重 P_C 、 P_B の組み合わせによる定鉛直荷重時の軸力図、曲げモーメント図を示す。骨組の名称は、 P_B の値に対応しており、例えばFR6は、 P_B が 6.0tonf で、 P_C が 33.0tonf であることを示している。

系座標は梁、柱の節点と各部材の中央に水平、鉛直、回転の3座標を設けた。各部材の基本分割要素長は 30cm とした。したがって、梁は最大20要素、柱は最大10要素まで分割される。また、解析は変位増分法で行ない、第2層梁中央の水平方向変位を制御している。打ち切り誤差限界は、左肩の水平方向

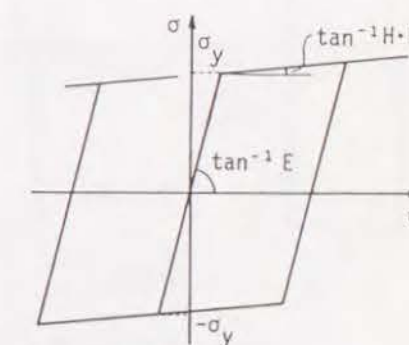
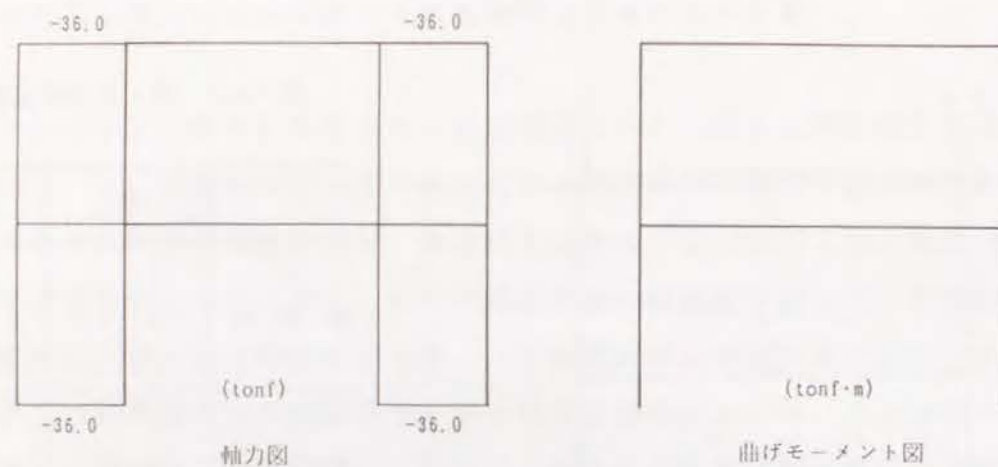
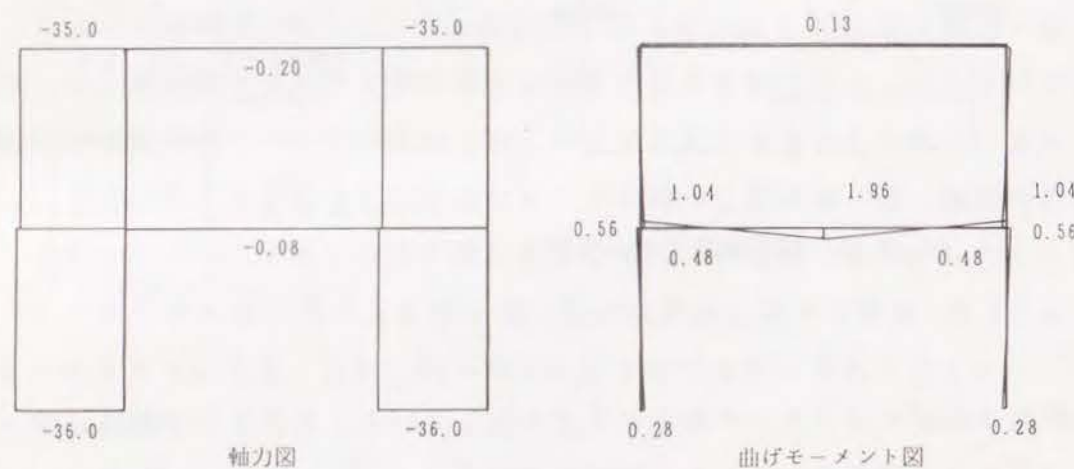


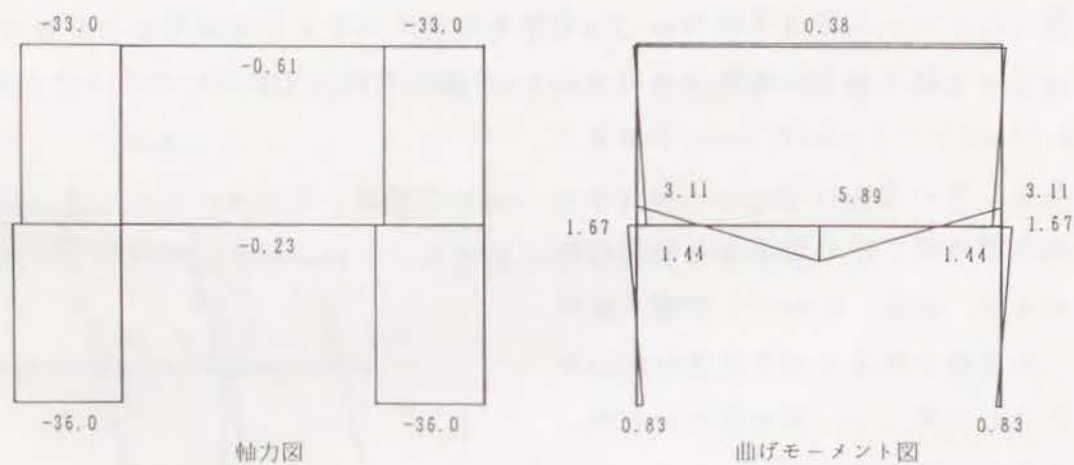
図-4.11 バイリニア応力ひずみ関係



(a) FR0 ($P_B=0.0\text{tonf}$, $P_C=36.0\text{tonf}$)

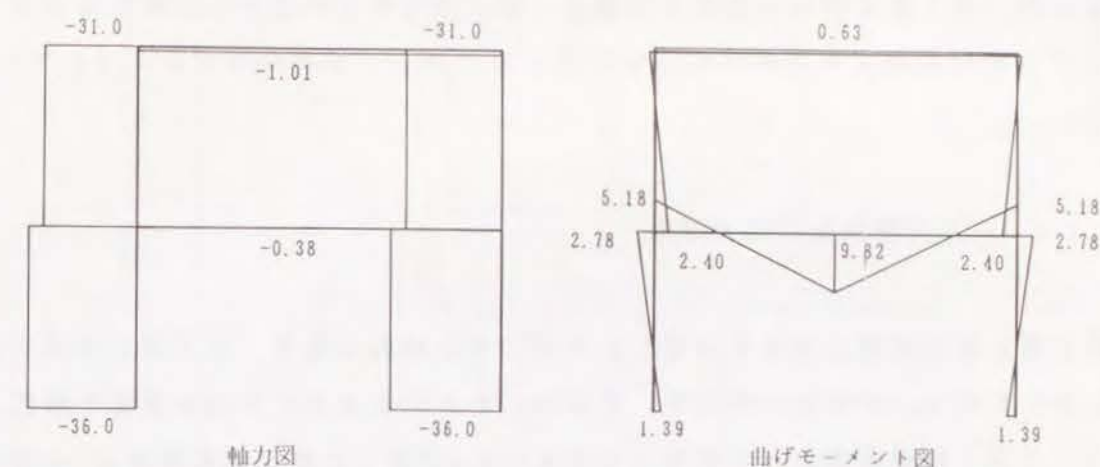


(b) FR2 ($P_B=2.0\text{tonf}$, $P_C=35.0\text{tonf}$)

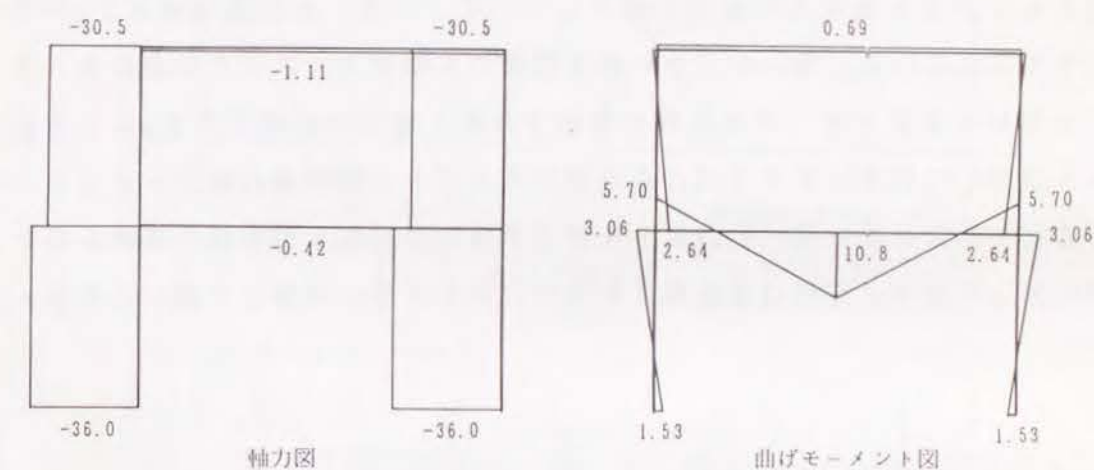


(c) FR6 ($P_B=6.0\text{tonf}$, $P_C=33.0\text{tonf}$)

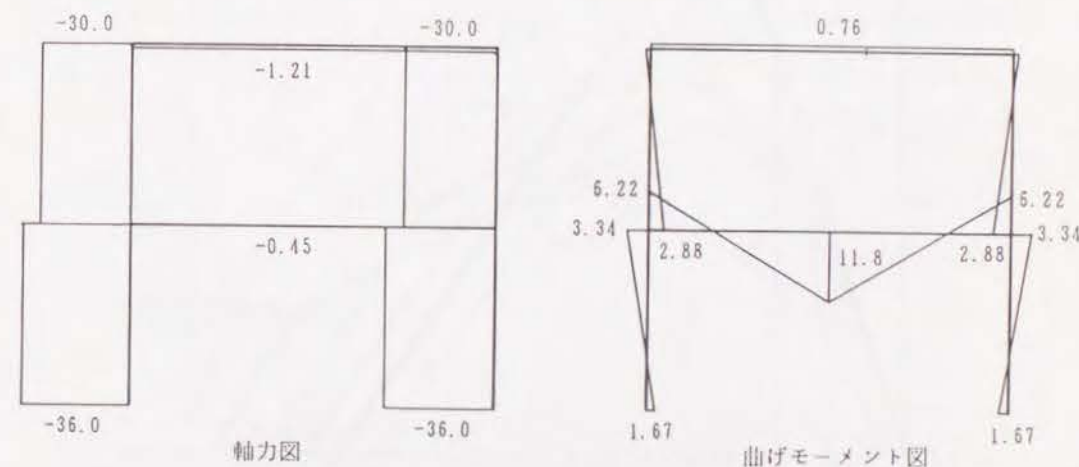
図-4.12 鉛直荷重時の軸力図および曲げモーメント図



(d) FR10 ($P_B=10.0\text{tonf}$, $P_C=31.0\text{tonf}$)



(e) FR11 ($P_B=11.0\text{tonf}$, $P_C=30.5\text{tonf}$)



(f) FR12 ($P_B=12.0\text{tonf}$, $P_C=30.0\text{tonf}$)

図-4.12 (つづき) 鉛直荷重時の軸力図および曲げモーメント図

変位と力、第1層梁中央の鉛直方向変位、第1層柱中央の水平方向変位ならびに前ステップで絶対値最大の増分ひずみを経験したフランジ要素のひずみについて1.0%とした。

4.3.2 一方向静的載荷時の挙動

第2層の梁の両端に大きさの等しい水平力を比例的に加え、右方向に単調変位させたときのFR0, FR2, FR6, FR10, FR11およびFR12の挙動を解析し、水平力Fと第2層梁中央の水平変位uを高さ600cmで除した構造回転角 θ_{ST} の関係を図-4.13に示す。第1層梁の鉛直荷重 P_B が0であるFR0の水平耐力が最も高く、 P_B が増えるに従って最大水平耐力が低下している。一方、変形能は逆に P_B が増えるに従って増大している。図-4.12から鉛直荷重のみの場合、FR0は曲げモーメントが全ての部材で存在せず、それ以外の骨組では第1層梁の鉛直荷重 P_B による曲げモーメントが生じている。水平方向に変位を与えたときの降伏域の発生もFR0とそれ以外の骨組では異なる。図-4.14にFR0とFR12の変形と塑性域の状況を各F- θ_{ST} 曲線に沿って示す。変形は骨組幾何形状の尺度の5倍に増幅して描いてある。なお、

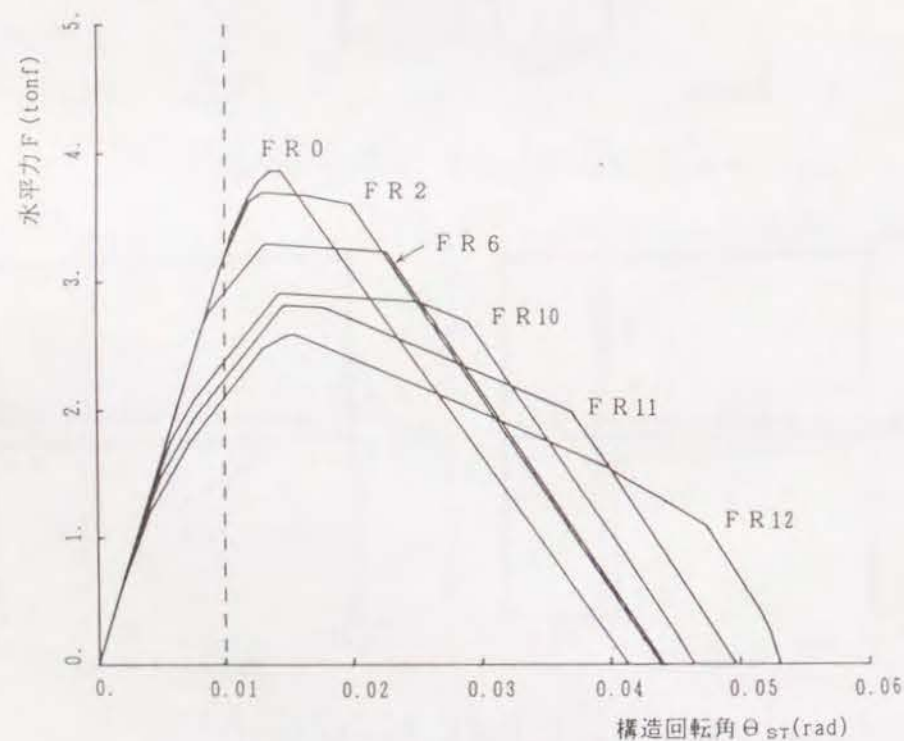
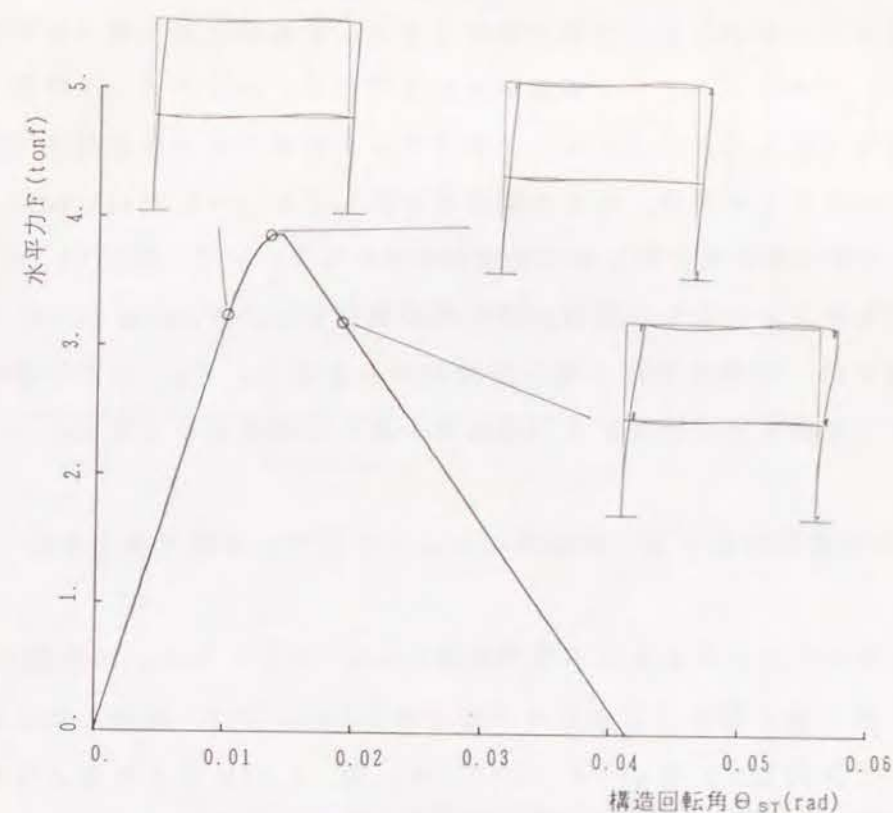
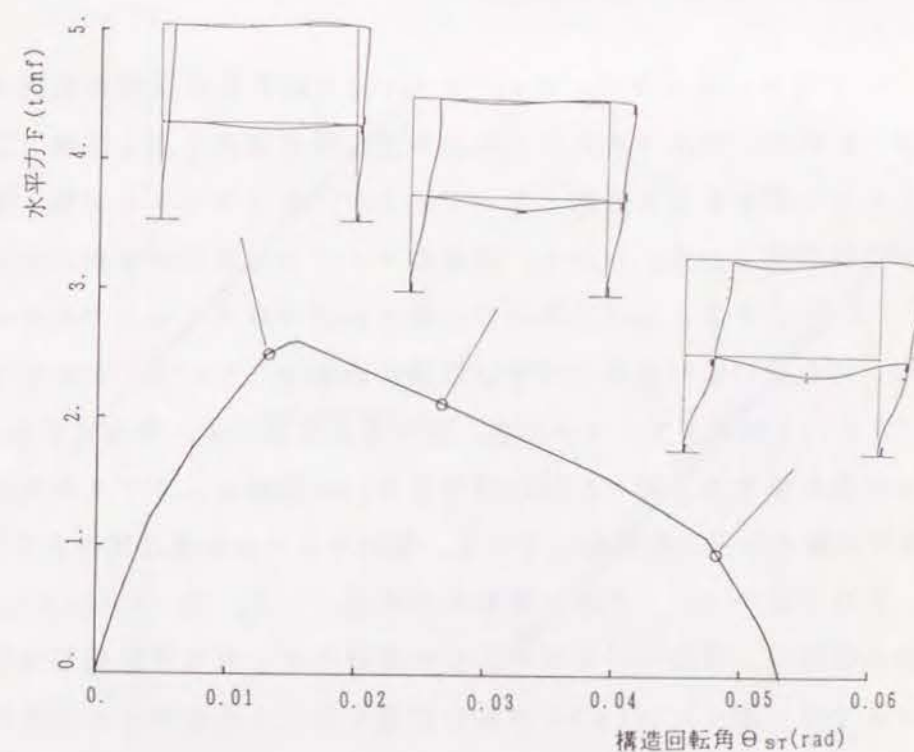


図-4.13 一方向静的載荷時の水平力Fと構造回転角 θ_{ST} の関係



(a) FR0



(b) FR12

図-4.14 FR0, FR12の一方向静的載荷時のF- θ_{ST} 関係と変形・塑性域の進展

節点回転角および部材各部の曲率は概略である。材軸線に沿う線分が塑性状態のフランジ要素を、点を除荷フランジ要素を表わしている。サンドイッチ断面であるので、材軸線のどちら側に示されるかで、どのフランジ要素であるかを判別できる。図-4.14(a)に示したFR0では、あまり塑性域は拡らず $\theta_{ST}=0.01431\text{rad}$ 以上の劣化曲線に対応する骨組の塑性域は第2層の柱端部のみとなる。一方、同図(b)のFR12では、第1層梁中央を含めかなりの部分に塑性域が発生する。 $\theta_{ST}=0.04734\text{rad}$ 以上の最終の劣化曲線では、塑性域は第1層の柱端部のみとなる。 $P_B \neq 0$ の骨組の最終劣化曲線に対応する骨組の塑性域はFR12同様第1層の柱端部のみとなる。

4.3.3 定変位振幅繰り返し载荷時のシェークダウン挙動と劣化挙動

第2層の梁の中央の水平変位を片側振幅6.0cm、すなわち θ_{ST} の振幅 ϕ で0.01radの完全両振り繰り返し载荷(CRENプログラム[14],[75])を与えたときの挙動をFERT-Pで解析した。 $\theta_{ST}=0.01\text{rad}$ では、図-4.13に示されるように一方向载荷時には全骨組とも力-変形曲線は正勾配であり耐力上昇域にある。FR0, FR2, FR6, FR10, FR11およびFR12の $F-\theta_{ST}$ 関係曲線をそれぞれ図-4.15(a)~(f)に示す。

図-4.13から明らかなように、 $\theta_{ST}=0.01\text{rad}$ ではFR0は弾性範囲である。したがって、図-4.15(a)に示された $F-\theta_{ST}$ 関係曲線は原点を通る直線となる。図-4.15(b)のFR2も原点を通る直線となっているが、第1サイクルで第1層左右の柱の最下部に塑性域が見られる。しかし、以後のサイクルでは塑性変形は生じない。図-4.15(c),(d)のFR6およびFR10の曲線は最初の数サイクルでのみある程度の面積をもつループを描いているが、以後は急速に直線化している。FR6では第5サイクル以後、FR10では第7サイクル以後、塑性変形は生じず、弾性的挙動いわゆるシェークダウン挙動を呈する。図-4.15(e)のFR11の曲線は、サイクル毎にループを描きながら着実に最大水平力が増加していき、第34サイクル以降は塑性変形しなくなる。すなわち、FR11はシェークダウン挙動を呈する。一方、図-4.15(f)に示したFR12の $F-\theta_{ST}$ 曲線は、同図(e)までに示した曲線と全く異なる様相を呈している。第12サイクルまでは、図-4.15(e)のFR11に見られたように徐々に水平力は上昇していくが、それ以後サイクル毎に、それまでとは逆にループは扁平になり、水平力は急激に低下し、骨組は崩壊する。

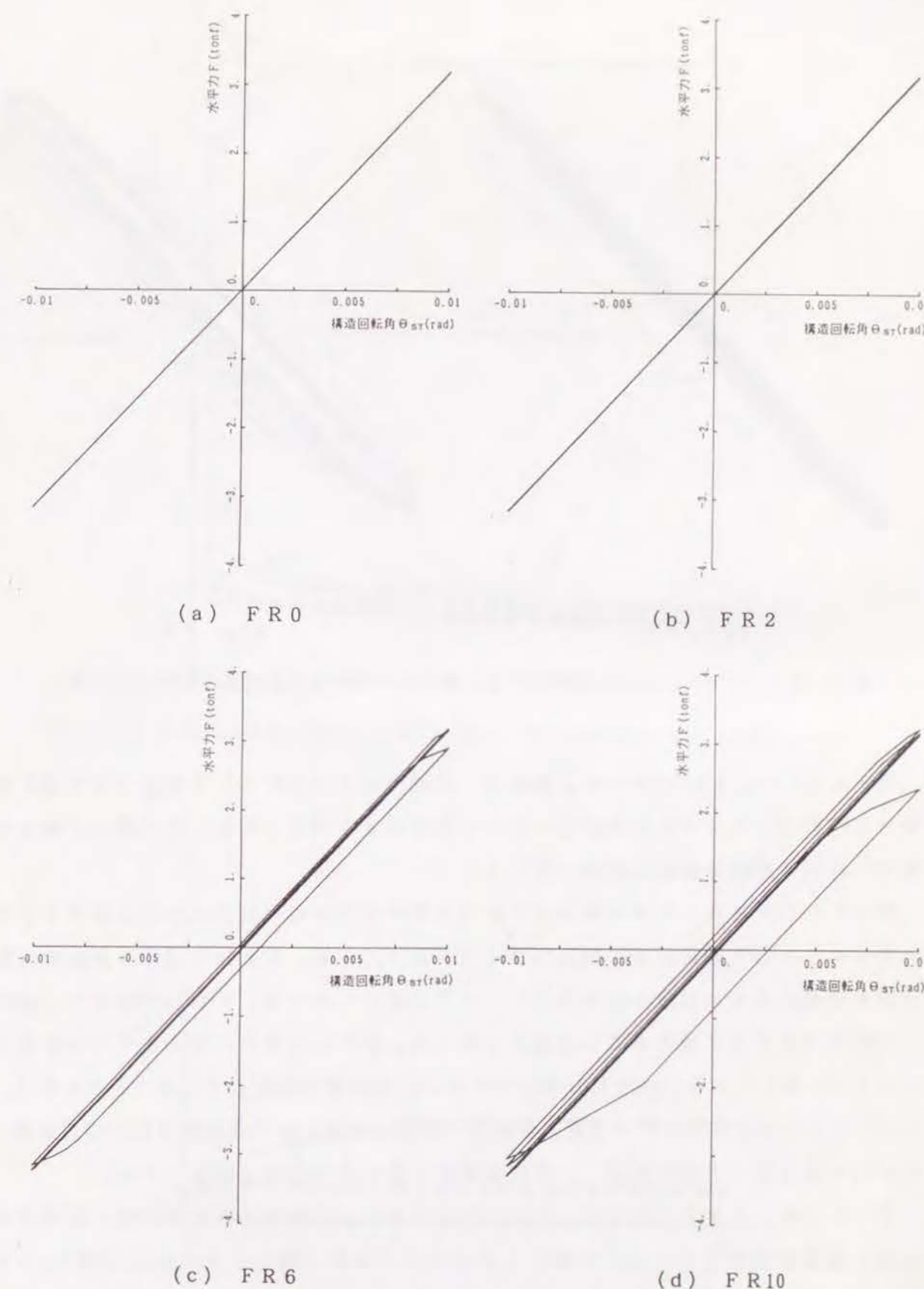


図-4.15 定変位振幅繰り返し载荷時の水平力 F と構造回転角 θ_{ST} の関係

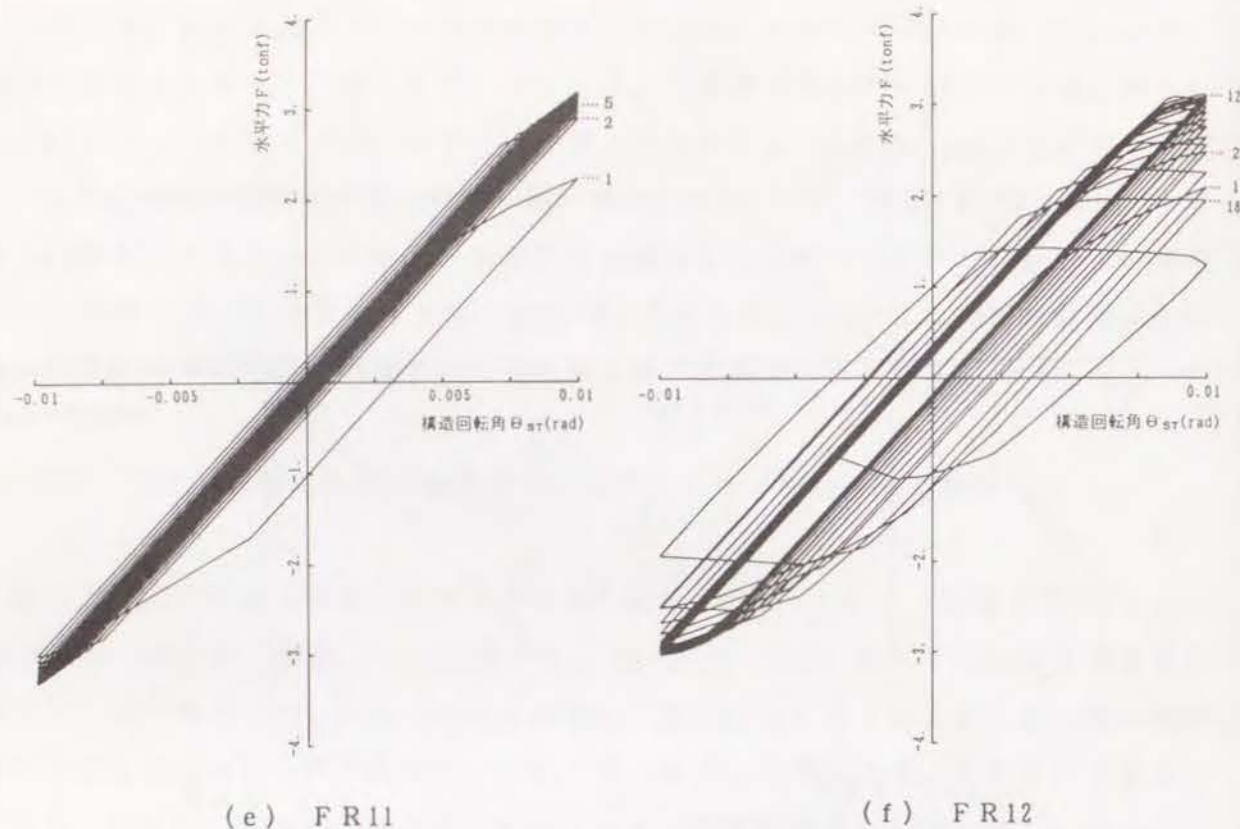


図-4.15 (つづき) 定変位振幅繰り返し载荷時の水平力 F と構造回転角 θ_{ST} の関係

図-4.15(e), (f)の $F-\theta_{ST}$ 曲線は、文献[59]で上谷が示した両振り繰り返しを受ける門形ラーメンで柱中央付近にヒンジが存在する場合と存在しない場合の層せん断力-柱回転角関係曲線に似通っている。

図-4.16にFR0, FR11およびFR12の各サイクル毎の最大水平力と最小水平力とをプロットした図を示す。図は25サイクルまでである。FR12で \boxtimes 印は変位の反転点以外で最大あるいは最小水平力となったことを示している。それ以外は全て、変位の反転点で水平力は最大あるいは最小となった。FR11の最大、最小水平力が収束しているのに対し、FR12のそれは第13サイクル以後急激に劣化していることがわかる。なお、FR11では各サイクルの最大水平力(あるいは最小水平力の絶対値)の収束値、FR12ではそれらの最大値は、一方向载荷時の最大水平力を上回っている。

図-4.17は、FR0, FR10, FR11およびFR12の各サイクル毎の第1層梁中央の最大鉛直変位をプロットした図である。FR0は第1層梁中央の鉛直荷重 P_B が0であり、繰り返し载荷による塑性変形もないので、柱の縮みによる僅かな変位が生じるのみである。繰り返し回数0にプロットされているFR10, FR11およびFR12の

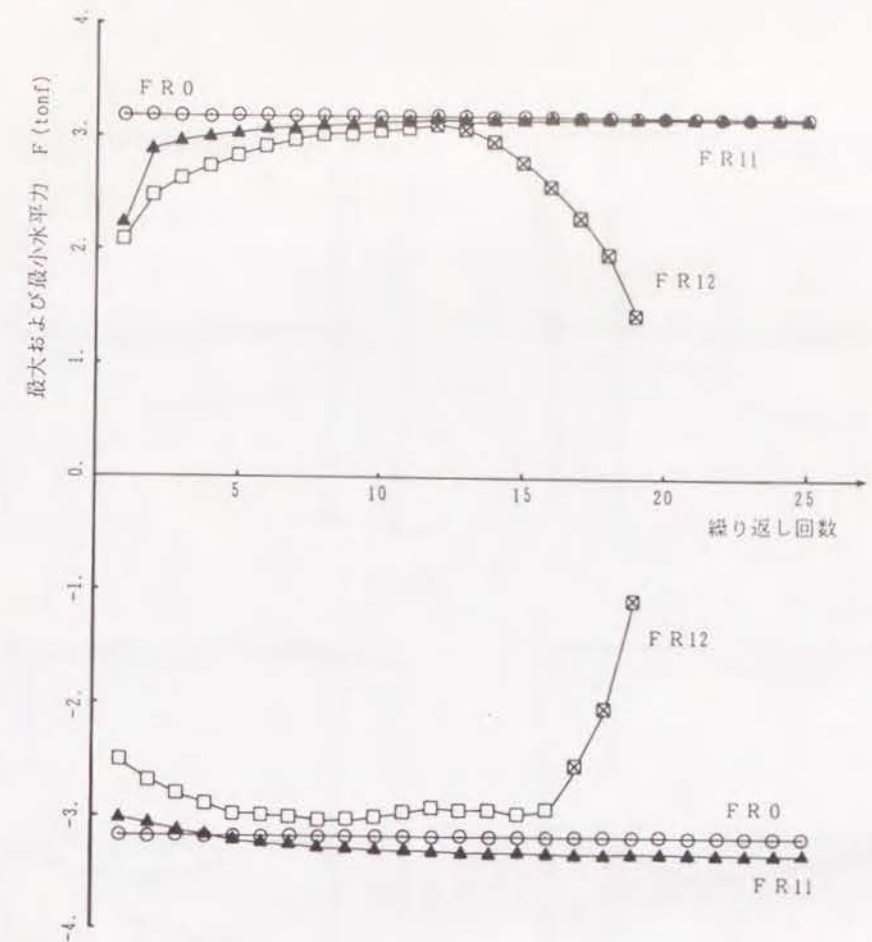


図-4.16 FR0, FR11およびFR12の各サイクル毎の最大水平力と最小水平力

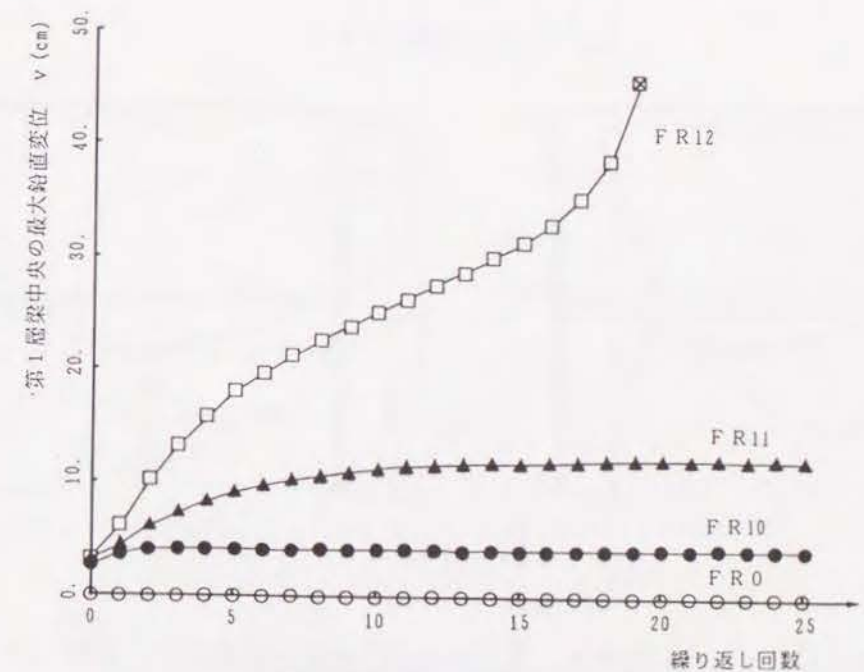
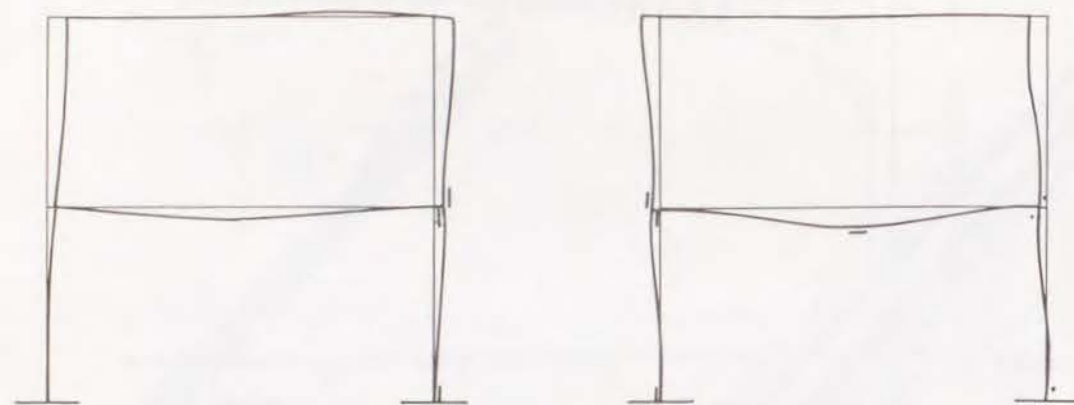
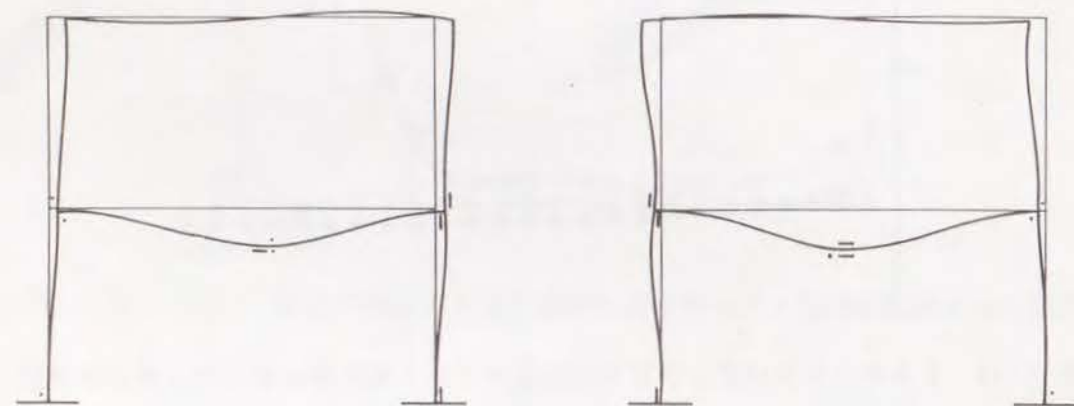


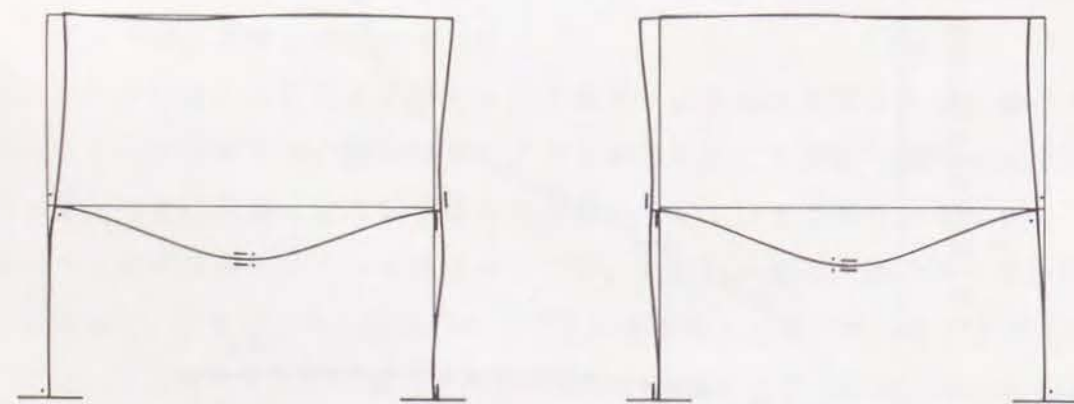
図-4.17 FR0, FR10, FR11およびFR12の各サイクル毎の第1層梁中央の最大鉛直変位



1st cycle

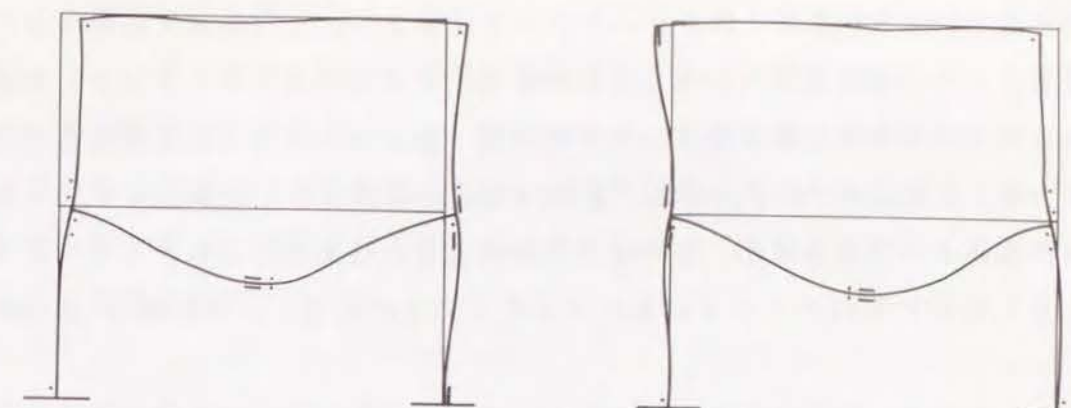


3rd cycle

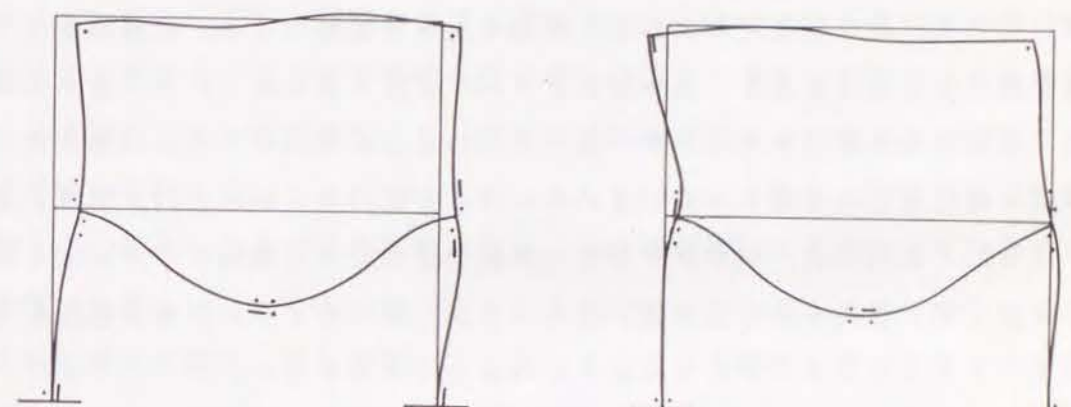


5th cycle

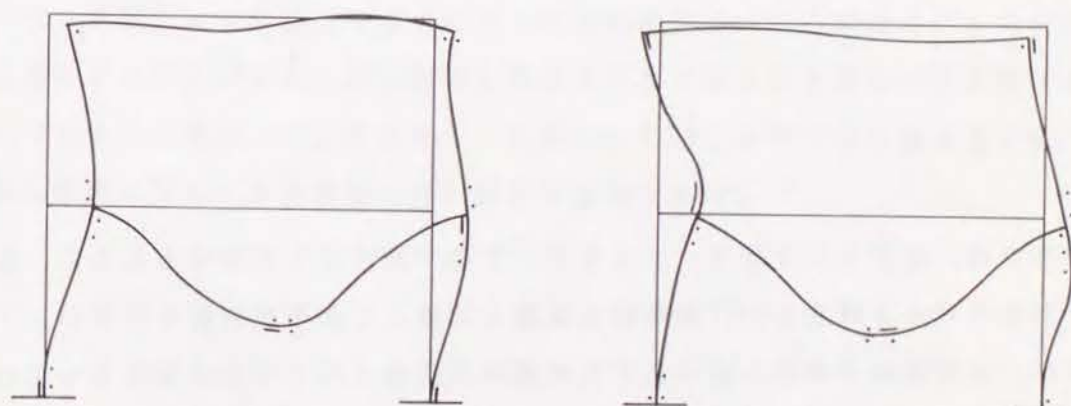
図-4.18 FR12の第1, 3, 5, 10, 15および18サイクルの
左右の反転点での変形と塑性域の状況



10th cycle



15th cycle



18th cycle

図-4.18 (つづき) FR12の第1, 3, 5, 10, 15および18サイクルの
左右の反転点での変形と塑性域の状況

初期鉛直荷重時の変位は、それぞれ2.754cm, 3.012cm, 3.271cmである。FR12の第1層梁中央鉛直変位は、サイクル毎に増大していき、第19サイクル目の解析を終了した時点で45.77cmに達している。一方、FR10およびFR11の最大鉛直変位は初め増加するが、やがて収束していることがわかる。FR10ではシェークダウン挙動を呈し始めた第7サイクル以後の各サイクルでの第1層梁中央の最大鉛直変位は完全に収束しており、4.202cmである。また、FR11ではこの図に示した第25サイクル付近でもほんの僅かずつではあるが、各サイクル毎に変位は増加しており、シェークダウン挙動を呈し始めた第34サイクル以後にようやく完全に収束し、その値は12.20cmであった。

FR12の第1, 3, 5, 10, 15および18サイクルの左右の反転点での変形と塑性域の状況を図-4.18に示す。図-4.14同様、変形は骨組幾何形状の尺度の5倍に増幅して描いてある。節点回転角および部材各部の曲率は概略である。材軸線に沿う線分が塑性状態のフランジ要素を、点が除荷フランジ要素を表わしている。各サイクルで必ず第1層梁中央に塑性域が見られ、図-4.18に示した第10サイクル以降の図では、第1層梁の塑性変形の蓄積による引き込みに伴う骨組の腰くびれ[76]が明瞭に観察される。なお、FR11では、シェークダウン挙動を呈し始める第34サイクルより前の反転点では必ず第1層梁中央に塑性域が見られるが、第34サイクル以後は塑性変形は全く生じず、FR12に見られるような腰くびれは殆ど見られない。

図-4.17, 4.18の考察から、FR12の劣化挙動は、第1層梁の繰返し塑性変形の蓄積による梁中央の沈下し続けることにより誘発されることが考えられる。

4.4 まとめ

本章では、まず4.2節で、FERT-Pの予測性能を実証するために、繰返し水平力をうける2層筋かい付鋼骨組の実験を対象とした予測解析を行ない、FERT-Pが、部材座屈や骨組に組み込まれた部材の座屈に伴う不安定現象をも含む弾塑性挙動の解析を非常に良い精度で、かつ制御のための予備試行解析を全く行なうことなく実行できる解析法であることを確認した。ここで使用した数値解析プログラムは、平面骨組に限定されるが、任意形状鋼骨組の臨界挙動予測解析に高信頼度で使用できるものであり、骨組システムの挙動解明のための実験に代わる数値シミュレーション手法として、あるいは実験に先立って数値解析を行なうことによって実験をより効率

良く実施するための援用手法として有用である。

次に4.3節では、2層1スパン骨組の左右柱頂部と第1層梁中央に鉛直荷重が作用している下で、第2層梁中央に水平方向両振り繰返し載荷を与えたときの挙動をFERT-Pで解析した結果を示した。数値解析は、鉛直荷重のみが作用しているときの第1層の軸力比が40.0%になるように、左右柱頂部にかかる鉛直荷重と第1層梁中央にかかる鉛直荷重の割合を変えた一連の骨組について実施している。本解析結果から、以下の知見を得た：

- (1) これまで部材レベルでは報告されている繰返し載荷の下での急激な劣化現象と類似の劣化現象が骨組の繰返し載荷時にも生じ得る可能性がある。
- (2) 繰返しによって劣化現象を呈する骨組とシェークダウン挙動に至り安定な挙動を呈する骨組との鉛直荷重載荷条件の違いは僅かである。柱頂部と第1層梁中央にそれぞれかかる荷重の割合に、骨組の崩壊挙動とシェークダウン挙動を分ける臨界値が存在する。
- (3) 繰返し載荷による骨組の崩壊挙動を、一方向載荷時の挙動から予測することは困難である。
- (4) 骨組の崩壊挙動は、第1層梁の繰返し毎に生じる塑性変形の蓄積で梁中央が沈下し続けることによって誘発されることが考えられる。

FERT-Pは、増分摂動法の導入によって材料の応力ひずみ関係モデルの構成則を確実に遵守することができ、かつ移動座標系の採用で大たわみ域での精度を確保することができる。したがって、FERT-Pを用いれば、本章で示したような新たな臨界挙動の探索に対しても信頼性の高い解析を実施できる。

第5章 増分摂動法の動的解析への適用

5.1 序

1973年の第5回世界地震工学会議において、棚橋・中村・石田は当時のコンピュータを駆使し、一次元複合非線形有限要素法によって、世界で初めて、強地震動時の重層ひずみ硬化平面骨組の大変形挙動の解析結果を発表した[5]。その後、そこで提示された弾塑性骨組の大たわみ解析法は、強風による動的崩壊挙動の解析などにも使用されている[77], 1), 8)。その動的解析プログラムにおいて、1973年の開発当初から主として用いられている運動方程式の数値積分法は、時間刻み幅に対して無条件に安定な解を与える増分型平均加速度法である。運動方程式の数値積分法としては、この他にもRunge-Kutta法、Wilson- θ 法、Newmark- β 法など多数の提案がなされ、時間刻み幅に対する安定性や誤差評価に関する研究も数多く発表されている。しかし、そのほとんどが線形弾性応答に関する性能評価に限られており、動的弾塑性応答に関する予測精度を的確に論じたものは見当たらない。弾塑性挙動の予測解析の精度は、材料の応力ひずみ経路追跡精度に依存するはずである。したがって、いずれの数値積分法を使用するにしても、弾性応答での適正な時間刻み幅よりかなり小さな刻み幅を用いる必要があり、時間刻み幅に対する応答の収束性を確認する必要がある。

第2章で骨組構造物の静的臨界挙動予測解析法として増分摂動法を導入した高精度数値解析法について述べた。本章では、この増分摂動法を動的解析に適用するための定式化過程を示し、それに従って静的解析プログラムFERT-Pを拡張した動的応答解析プログラムFERT-PDを提示する。複合非線形系の運動方程式を時間パラメータに関して摂動展開するという方法は、静的解析における増分摂動法の直接的拡張であり、1972年に上谷のアイデア[2]が示された後、1975年に1自由度弾塑性系の初速外乱に対する動的安定限界を求める解析で横尾・中村・伝田が使用した例がある[78]。ところが、静的問題でもそうであったように、発表当初から、文献[1~4]で増分摂動法の導入が、複合非線形解析の精度向上と総合的な計算効率を高めることになると示唆しているにも関わらず、これまでほとんど実用化が計られなかった。それは、当時の計算機環境からみて、骨組の解析に適用するには現実的ではないとの判断によるものであろう。しかし、昨今のコンピュータの急速な発展は、計算機容量・演算時

間などの制約から、研究者を次第に解放し、解析法を正確で信頼性の高いものとするための増分摂動法の導入を十分可能な状況にしている。また、一層精度の高い解を求めたいという要求や、不安定域あるいは限界状態の挙動まで予測したいという要求が現われるなど、数値解析に対する需要は急速に多様化し高度化する傾向にある。静的解析におけるFERT-Pは、まさにそうした視点にたって提示されたものであり、本章で述べるFERT-PDの提示も同様な意味を持つ。

増分摂動法を動的弾塑性解析に適用すると、静的解析でなされた増分長の自動決定同様、時間刻み幅を自動決定することが可能となる。また、これまでの慣用の数値積分法では原理的に不可能であった要素の応力ひずみ関係の正確な追跡を、除荷開始点の予測も含めて、行うことが可能となる。本章では、まず、一般の多自由度系の運動方程式についての増分摂動法による解法を示し、次に門形平面鋼骨組の地震時挙動を解析例として、今回提示したFERT-PDによる結果と増分型平均加速度法による結果とを比較検討する。

5.2 増分摂動法による運動方程式の摂動展開

5.2.1 複合非線形系の運動方程式

時間的に変動する外力あるいは強制変位が構造物に加わる時、離散化された構造物の時刻 t でのつり合い式は、一般に、次のように書くことができる、

$$\{f_I(t)\} + \{f_D(t)\} + \{f_R(t)\} = \{f_E(t)\} \quad (5.1)$$

ここに、 $\{f_I(t)\}$ は慣性力ベクトル、 $\{f_D(t)\}$ は減衰力ベクトル、 $\{f_R(t)\}$ は復元力ベクトルであり、 $\{f_E(t)\}$ は外力ベクトルである。節点変位ベクトルを $\{u(t)\}$ で表記し、粘性減衰を考慮すると、慣性力ベクトルおよび減衰力ベクトルは、

$$\{f_I(t)\} = [M] \{\ddot{u}(t)\} \quad (5.2a)$$

$$\{f_D(t)\} = [C] \{\dot{u}(t)\} \quad (5.2b)$$

と書ける。式(5.2)において $[M]$ および $[C]$ は、それぞれ系質量行列、系減衰行列である。一般に系質量行列 $[M]$ は応答解析時間を通じて不変であり、このことを利用すれば後述するように数値計算効率の上で非常に有利なものとなる。ここでは、以下 $[M]$ および $[C]$ は応答解析時間を通じて一定であるものとする。ドットは時間 t についての微分を表わす。一方、ここで対象とするような複合非線形構造物では、

復元力 $\{f_R(t)\}$ は、線形系のように一定の系剛性行列 $[K_E]$ を用いて $[K_E]\{u(t)\}$ のように書くことはできず、系剛性行列 $[K]$ はその非線形性によって時々刻々変化するものとなる。塑性域での材料挙動は履歴に依存するので、材料関係式は一般的に履歴過程の各状態における応力速度とひずみ速度の関係として記述される。これを用いて導かれる系の復元力特性すなわち一般化力と一般化変位の関係(系剛性関係式)もまた速度量関係式となる。

$$\{\dot{f}_R(t)\} = [K] \{\dot{u}(t)\} \quad (5.2c)$$

ここで、 $[K]$ は静的複合非線形解析に用いられた接線剛性行列と同じであり、時間とともに時々刻々変化する。

5.2.2 状態変数の摂動展開

$t = t_0$ での状態が既知であるとし、これを起点として測った時間を $\tau (= t - t_0)$ で表わす。もし式(5.1)、(5.2)の $\{u\}$ 、 $\{f_R\}$ などのすべての状態変数の変動が $t = t_0$ より始まるある有限時間内において t に関する解析的一価関数によって表わされるとすれば、状態量の変化を表わすこれらの関数は $t = t_0$ ($\tau = 0$)の状態において τ に関して次のように摂動展開できる。

$$\{u(t)\} = \{u(t_0 + \tau)\} = \sum_{m=0}^{\infty} \{u^{(m)}\} \tau^m \quad (5.3a)$$

$$\{f_R(t)\} = \{f_R(t_0 + \tau)\} = \sum_{m=0}^{\infty} \{f_R^{(m)}\} \tau^m \quad (5.3b)$$

$$\{f_E(t)\} = \{f_E(t_0 + \tau)\} = \sum_{m=0}^{\infty} \{f_E^{(m)}\} \tau^m \quad (5.3c)$$

ここに $\{u^{(0)}\}$ 、 $\{f_R^{(0)}\}$ 、 $\{f_E^{(0)}\}$ は時刻 $t = t_0$ での既知量 $\{u(t_0)\}$ 、 $\{f_R(t_0)\}$ 、 $\{f_E(t_0)\}$ を表わす。

また、式(5.2)中の $[M]$ 、 $[C]$ が不変であることを用いれば、 $\{f_I(t)\}$ 、 $\{f_D(t)\}$ は式(5.3a)を微分して式(5.2a)および(5.2b)にそれぞれ代入することによって、次式のように表わされる。

$$\begin{aligned} \{f_I(t)\} &= \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) [M] \{u^{(m)}\} \tau^{m-2} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} m(m+1) [M] \{u^{(m+1)}\} \tau^{m-1} \end{aligned} \quad (5.4a)$$

$$\{f_D(t)\} = \sum_{m=1}^{\infty} m [C] \{u^{(m)}\} \tau^{m-1} \quad (5.4b)$$

式(5.3b)の復元力に関する摂動係数 $\{f_R^{(m)}\}$ は、第2章の静的解析における摂動方程式(2.35)あるいは(2.57)から、次のように書くことができる。

$$\{f_R^{(m)}\} = [K^{(0)}] \{u^{(m)}\} + \{\hat{f}_R^{(m)}\}, \quad (m=1, 2, \dots) \quad (5.5)$$

ここに、 $[K^{(0)}]$ は時刻 t_0 でのいわゆる接線剛性行列である。また、 $\{\hat{f}_R^{(m)}\}$ は $(m-1)$ 次以下の係数だけを用いて計算できる項であり、式(5.5)では既知の項として取り扱われる。なお、 $\{\hat{f}_R^{(1)}\} = \{0\}$ である。

5.2.3 摂動運動方程式

運動方程式(5.1)に式(5.3b, c)、式(5.4a, b)および式(5.5)を代入して得られる式において、 τ の各次の係数がそれぞれ等式を満足しなければならないという条件より、摂動運動方程式が次のように導かれる。

0次摂動運動方程式：

$$2[M]\{u^{(2)}\} + [C]\{u^{(1)}\} + \{f_R^{(0)}\} = \{f_E^{(0)}\} \quad (5.6a)$$

j次摂動運動方程式：

$$\begin{aligned} (j+2)(j+1)[M]\{u^{(j+2)}\} + (j+1)[C]\{u^{(j+1)}\} + \{f_R^{(j)}\} &= \{f_E^{(j)}\} \\ (j=1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (5.6b)$$

前増分段階の解として既に求まっている $t = t_0$ での変位、速度、復元力を $\{u^*\}$ 、 $\{\dot{u}^*\}$ 、 $\{f_R^*\}$ と書く。いま、 $t = t_0$ において衝撃力の作用がなければ、現増分段階応答の初期条件は次式で与えられる。

$$\{u^{(0)}\} = \{u^*\} \quad (5.7a)$$

$$\{u^{(1)}\} = \{\dot{u}^*\} \quad (5.7b)$$

$$\{f_R^{(0)}\} = \{f_R^*\} \quad (5.7c)$$

もし、 $t = t_0$ の瞬間に力積 $(f \cdot \Delta t)$ の衝撃力が作用する場合には、式(5.7b)を次式のように書き換えねばならない。

$$\{u^{(1)}\} = \{\dot{u}^*\} + [M]^{-1}\{f \cdot \Delta t\} \quad (5.7b')$$

ところで、0次振動運動方程式(5.6a)に含まれる未知数は $\{u^{(2)}\}$ だけであるから、この式を $\{u^{(2)}\}$ に関して解けば次のように $\{u^{(2)}\}$ が求まる。

$$\{u^{(2)}\} = \frac{[M]^{-1}}{2} (\{f_E^{(0)}\} - [C]\{u^{(1)}\} - \{f_R^{(0)}\}) \quad (5.8a)$$

さらに、式(5.6b)の振動運動方程式を次数の低い方から順次用いることにより、 $\{u^{(3)}\}$ 、 $\{u^{(4)}\}$ 、 \dots を次のように求めることができる。

$$\begin{aligned} \{u^{(j+2)}\} &= \frac{[M]^{-1}}{(j+2)(j+1)} (\{f_E^{(j)}\} - \{f_R^{(j)}\} - (j+1)[C]\{u^{(j+1)}\}) \\ &= \frac{[M]^{-1}}{(j+2)(j+1)} (\{f_E^{(j)}\} - \{\hat{f}_R^{(j)}\} - [K^{(0)}]\{u^{(j)}\} \\ &\quad - (j+1)[C]\{u^{(j+1)}\}) \quad (j = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (5.8b)$$

この演算の主要部分は、質量行列の逆行列とベクトルとの積である。一般に質量行列は、応答解析時間を通じて一定であるので、最初のステップで一度逆行列を求めるだけでよい。一方、多自由度弾塑性構造物の動的解析で通常よく用いられる増分型の加速度法数値積分法では、剛性の変化に伴って、各ステップで係数行列の異なる連立方程式を解くことが必要である。

5.2.4 時間刻み幅の決定

増分振動法は、従来の数値解析法と異なり、増分時間刻み幅を予め指定する必要はなく、各ステップでのパラメータ増分値が自動的に決定されるという特徴を有している。この特徴は動的解析においても同様に保持され、時間刻み幅の決定方法は第2章に示した静的解析のそれと全く同じである。ただし、外力関数またはその導関数に不連続点がある場合、たとえば記録地震波などのような離散化データを用いる場合には状態変数の解析的一価性が失われるので、その時刻が増分ステップの打ち切り点となる。

また、増分振動法に基づく解析法では、時間積分に起因する誤差のレベルが、打ち切り誤差限界を指定することで、解析者の要求する範囲内に収まるように各増分段階

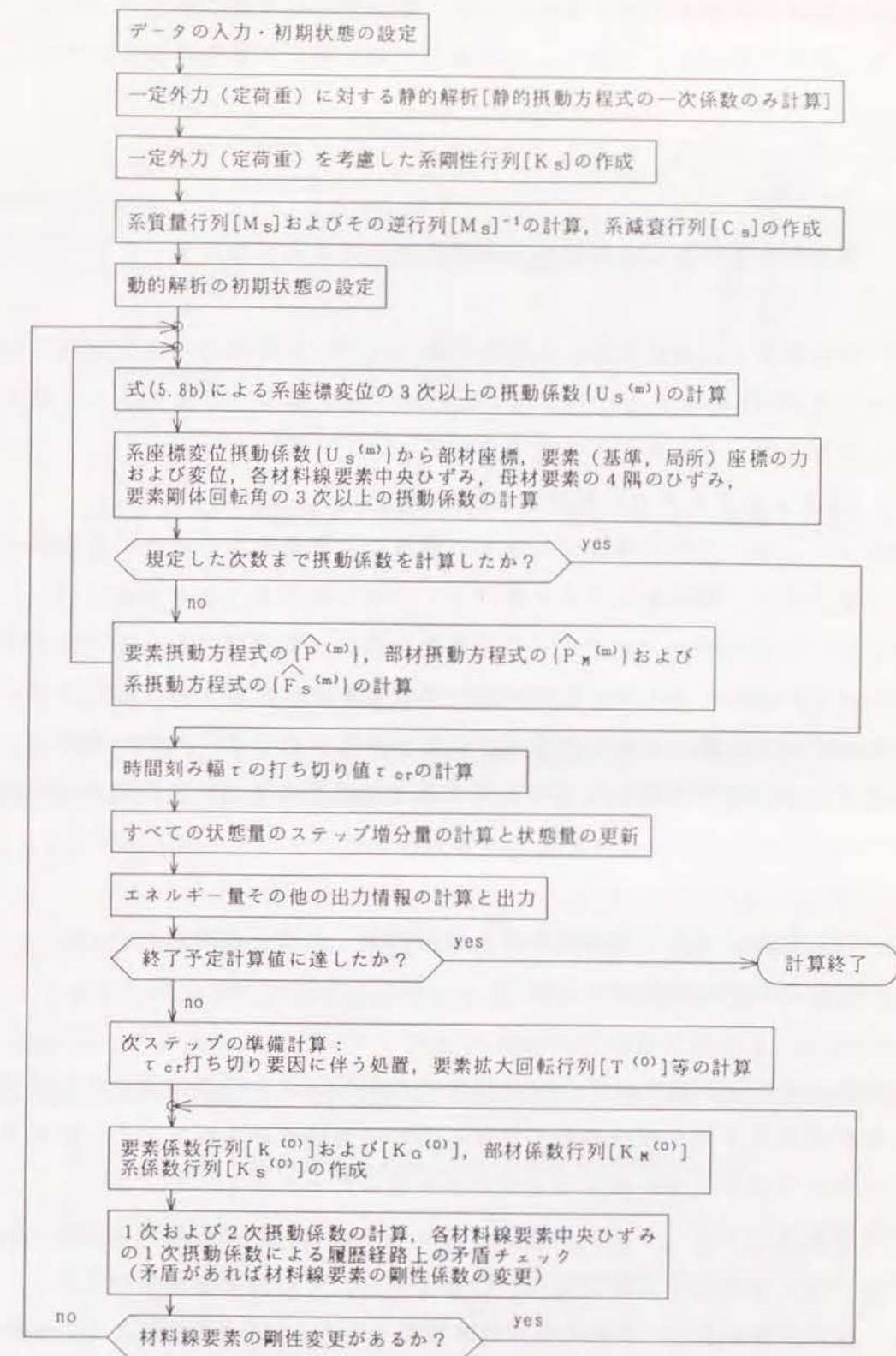


図-5.1 弾塑性平面骨組の動的臨界挙動解析用プログラムFERT-PDの概略流れ図

の時間刻み幅を自動的に決定できる。一方、微分方程式の数値解法としてよく知られたオイラー法系の解法は予め設定した時間刻み幅に関する誤差評価を行なうに止まっている。

5.3 弾塑性骨組の動的臨界挙動予測解析プログラム FERT-PD

系の一般化変位（系座標変位）の振動係数 $\{U_s^{(m)}\}$ が慣性力および減衰力に関する項を含んだ式(5.8)から求められること以外は、第2章2.6節に示した静的解析プログラム FERT-P とほとんど同じである。

図-5.1に FERT-PD の概略流れ図を示す。

系座標は、伝達行列法の導入によって、通常の有限要素法のように要素節点全てに設ける必要はなく、部材節点のみに設けることも可能である。

次節で用いる動的解析プログラムの系質量行列は、各部材に沿って分布する質量の初期弾性域での運動エネルギーと部材変位関数をもとに計算された部材座標に関する運動エネルギーとが整合するよう作成された一般化部材質量行列から構築される。また、系減衰行列は初期系剛性行列に比例するとの仮定に基づいて作成される[8]。

5.4 門形平面鋼骨組の地震時挙動の解析における増分振動法と増分型平均加速度法の比較

増分振動法を用いた FERT-PD の骨組の動的挙動の予測精度を検討する例題として、定鉛直荷重下で水平地震動を受ける門形平面鋼骨組を解析した。比較対象とした解析プログラムは、増分型平均加速度法を用いた FERT-D である。

入力地震動は、エル・セントロ地震の NS 成分記録10秒間を最大加速度500galに増幅して用いた。地震波の記録間隔は0.02秒であり、その間は直線補間した。

なお、数値計算はすべて京都大学大型計算機センターFACOM-VP200あるいは400によって行った。FERT-PD および FERT-D とほぼ同一の設計思想で作成されたプログラムであり、ベクトル化率を上げるための工夫は、特別には行なっていない。参考のため記した計算時間は、コンパイラ時間を除いたもので、FERT-PD のコンパイラ時間は約16秒、FERT-D では約9秒であった。

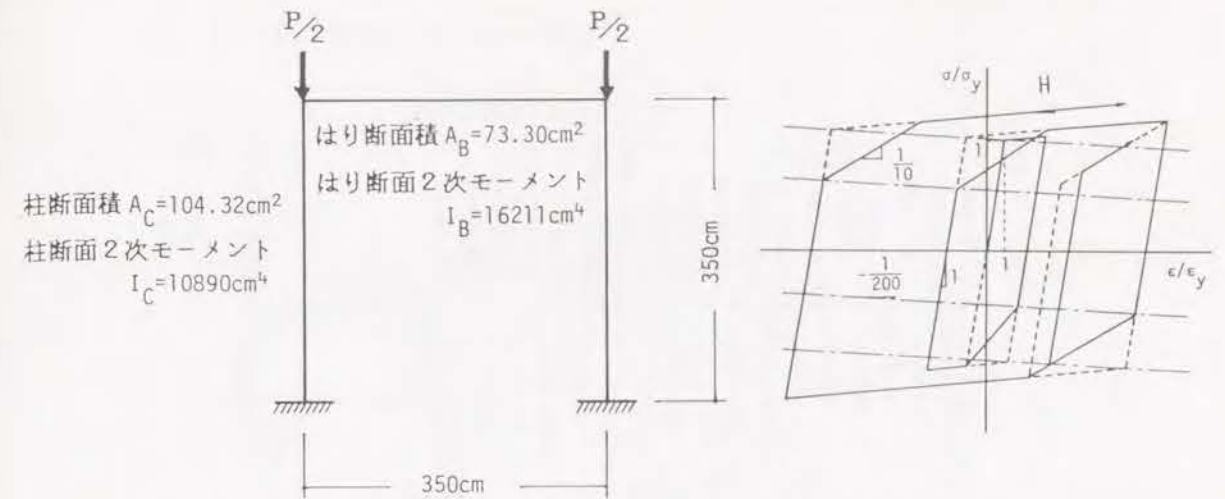


図-5.2 解析対象モデル骨組

図-5.3 区分線形化応力ひずみ関係

5.4.1 解析骨組モデル

図-5.2に解析対象とした門形骨組を示す。部材断面モデルおよび応力ひずみ関係モデルは、第3章3.3.1の鋼材で用いたモデルと同様であり、断面は4点モデル、応力ひずみ関係は図-5.3に示す区分線形化モデルである。ヤング係数は2100tonf/cm²、降伏応力は2.4tonf/cm²である。各部材は基本要素長35cmで最大10個の要素に分割される。

系質量行列は鉛直荷重Pが梁に等分布しているものとして5.3節に述べた手法で算定した。また、系減衰行列は初期弾性時の1次モードの減衰定数を1%として算定した。鉛直荷重Pが異なる3個のモデルの初期弾性時固有周期を表-5.1に示す。系座標変位は、左右の柱頭節点の水平変位、鉛直変位および回転の6成分である。

表-5.1 解析対象モデル骨組の初期弾性時の固有周期

	P (tonf)	柱軸力比	初期弾性時固有周期(sec)					
			1次	2次	3次	4次	5次	6次
model 1	50	0.1	0.4575	0.1021	0.03467	0.01948	0.01525	0.009597
model 2	100	0.2	0.6518	0.1444	0.04940	0.02750	0.02150	0.01350
model 3	200	0.4	0.9358	0.2042	0.06935	0.03896	0.03050	0.01919

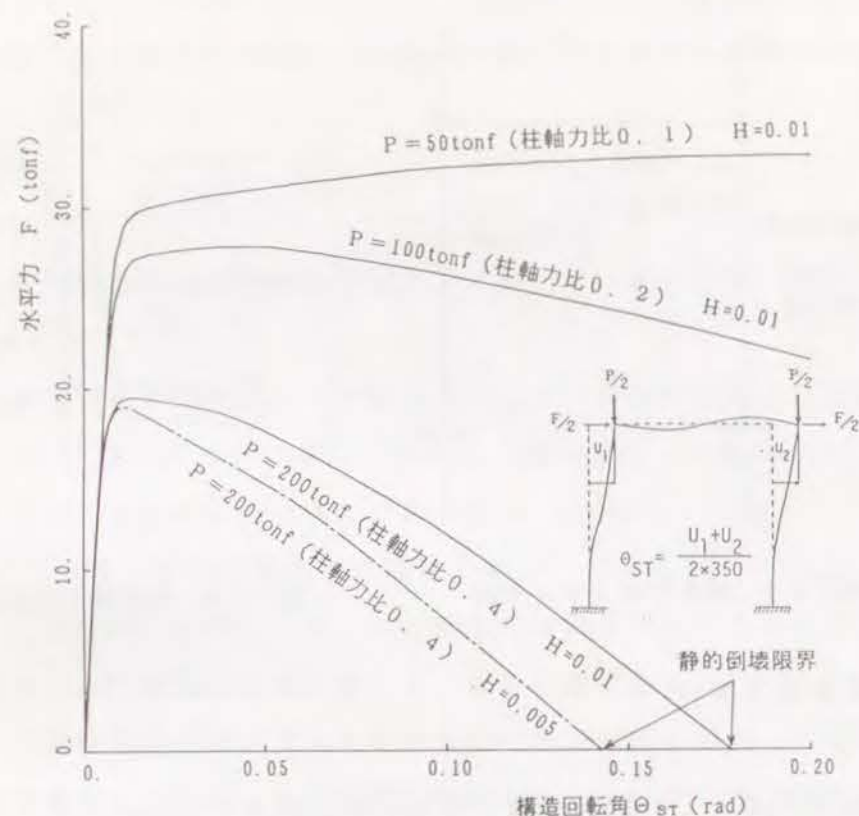


図-5.4 一方向静的載荷時の水平力Fと構造回転角 θ_{ST} の関係

図-5.4は、定鉛直荷重Pの作用下で水平力Fを一方向に比例載荷させたときの水平力Fと構造回転角 θ_{ST} （左右柱の頂部水平変位の平均を骨組高さで除したもの）との関係を示している。図-5.3中のひずみ硬化係数Hを0.01としたPの異なる3つのモデルと、P=200tonfでH=0.005としたモデルに関する曲線である。柱軸力比によるF- θ_{ST} 曲線の違いが明瞭に観察される。解析はFERT-Pを用いて行った。変位増分法を採用し、摂動係数は3次まで計算した。打ち切り誤差限界を力Fとすべての系座標変位および前増分ステップで最大ひずみ速度を経験した材料線要素のひずみに対してそれぞれ適用し、式(2.62)の RE_{limit} はすべて1.0%とした。計算時間は1～2秒であった。

5.4.2 弾性応答解析

初期降伏応力値を十分に大きい値に設定することにより弾性範囲内で応答するようにしたP=50tonfモデルをFERT-PDとFERT-Dで解析し、その結果を比較した。FERT-Dの時間刻み幅 Δt は1次固有周期のほぼ1/50, 1/100, 1/200とな

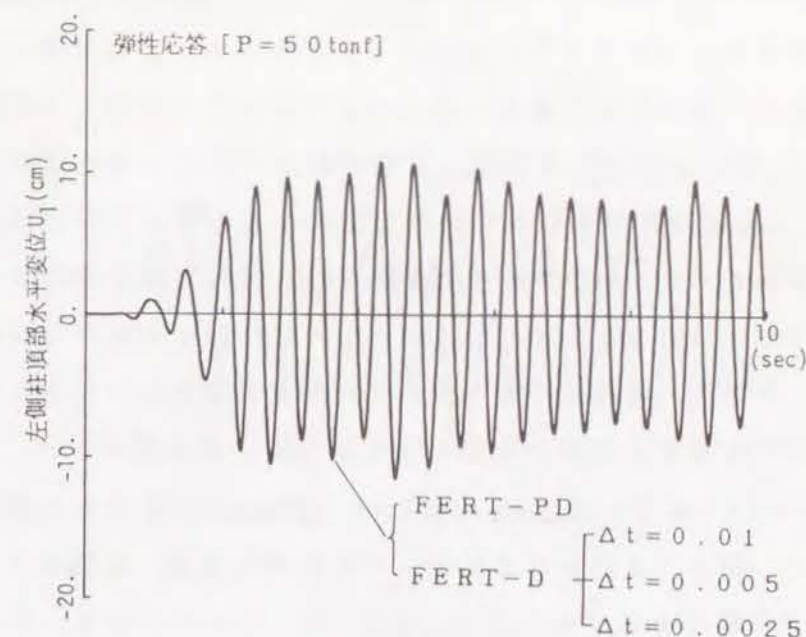


図-5.5 弾性応答における左側柱頂部水平変位の時刻歴

るよう地震波の記録間隔の1/2（すなわち $\Delta t=0.01$ 秒）、1/4（ $\Delta t=0.005$ 秒）および1/8（ $\Delta t=0.0025$ 秒）の3ケースを採用した。FERT-PDの時間刻み幅決定要因は、応答が弾性範囲内にあるので打ち切り誤差限界および地震波記録時刻である。打ち切り誤差限界は左柱節点の3変位成分および前ステップで最大ひずみ速度を経験した材料線要素のひずみに適用し、 $RE_{limit}=1.0\%$ とした。図-5.5に左側柱頂部の水平変位の時刻歴を示す。FERT-Dの3ケースおよびFERT-PDの結果に差は見られない。FERT-PDのステップ数は2073、計算時間は約47秒であった。一方、FERT-Dでは、時間刻み幅を地震波記録間隔の1/4とした場合にはほぼ同数のステップ数2000となるが、その計算時間は約6秒であった。

5.4.3 弾塑性応答解析

材料線要素が図-5.3の応力ひずみ関係（H=0.01）に従うものとして弾塑性応答解析を行った。通常の増分型平均加速度法では、予め時間刻み幅を設定する必要があるため図-5.3の材料定数変更点を正確に捉えることはできない。そのため、通常は変更点前後に適当にひずみ幅を設けて応答ひずみとその幅内に入った場合にのみ材料定数を変更するか、またはそれに類した技法が便宜的に用いられる。この場合、異な

る時間刻み幅についての解析をいくつか実行し、その応答の収束性を調べることによって、その応答結果を採用するか否か判定する必要がある。ここで用いた FERT-D では各増分段階の時間刻み幅を最初、弾性応答で収束性を確認した地震動記録間隔の $1/2$ ($\Delta t = 0.01$ 秒) に設定しておき、材料定数変更ひずみ幅を飛び越したときは時間刻み幅を $1/2$ にして再計算を行ない、増分後のひずみ値が材料定数変更域に入るまで時間刻み幅を $1/2$ ずつ小さくする方法をとった。材料定数変更ひずみ幅を、初期降伏ひずみの $\pm 1\%$ および $\pm 0.1\%$ とした 2 ケースについてそれぞれ解析を行った。一方、FERT-PD は、除荷の予測も含めて材料定数変更点を正確に捉えるよう時間刻み幅を自動的に計算するので、そのような幅を設ける必要はない。

図-5.6(a)~(c)に $P = 50 \text{ tonf}$, 100 tonf , 200 tonf の場合の左側柱頂部水平変位の時刻歴を示す。図中、実線が FERT-PD による結果、破線および一点鎖線が材料定数変更ひずみ幅をそれぞれ $\pm 1\%$, $\pm 0.1\%$ とした FERT-D による解析結果を示している。いずれの場合も FERT-D の変更ひずみ幅 $\pm 0.1\%$ の結果が、 $\pm 1\%$ の結果より格段に FERT-PD で得られた曲線に近づいている。FERT-D の変更ひずみ幅 $\pm 1\%$ による曲線は、図-5.6(b)の $P = 100 \text{ tonf}$ の場合には、ほぼ他の曲線と同様な様相を示し、近似値を与えていると言えるが、同図(a)では、5 秒後に生

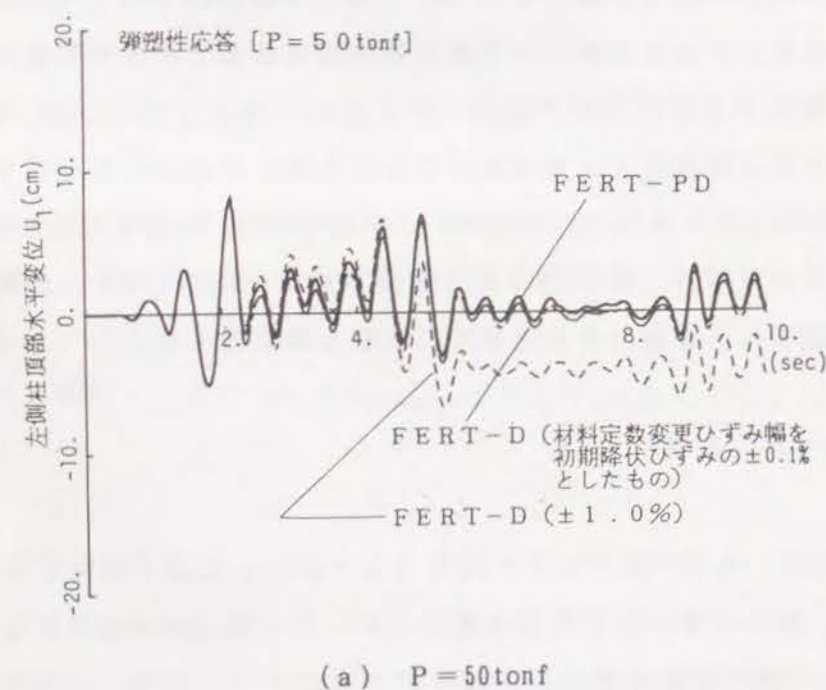


図-5.6 弾塑性応答における左側柱頂部水平変位の時刻歴

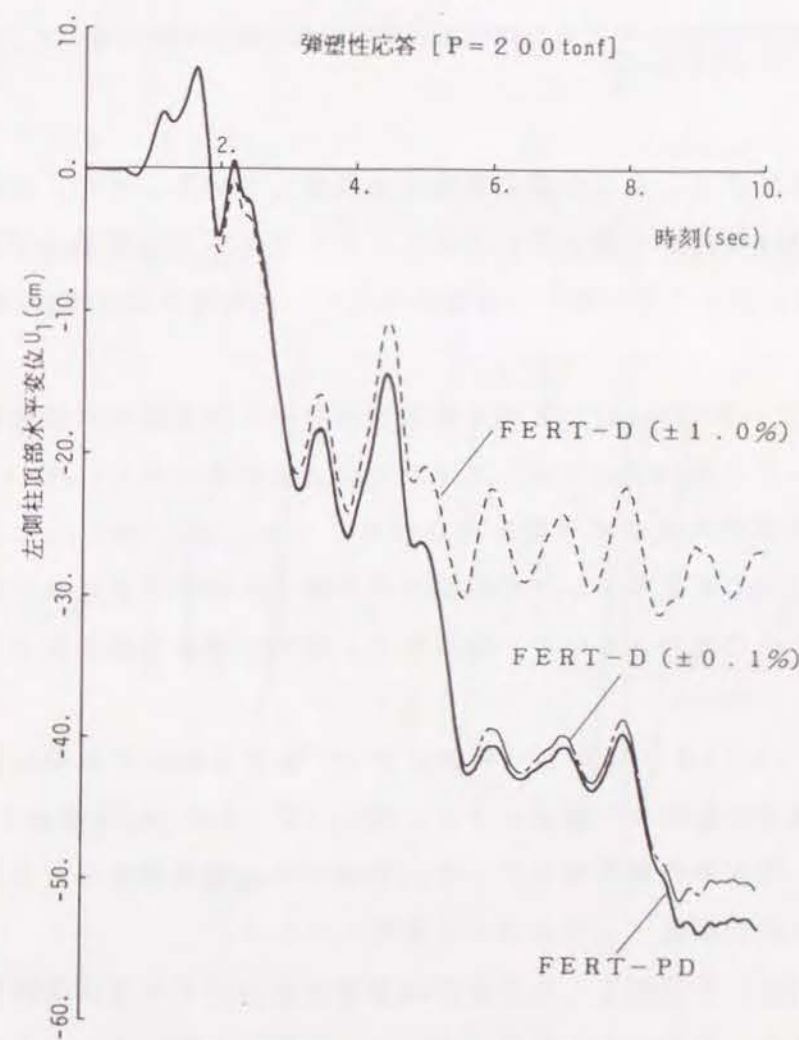
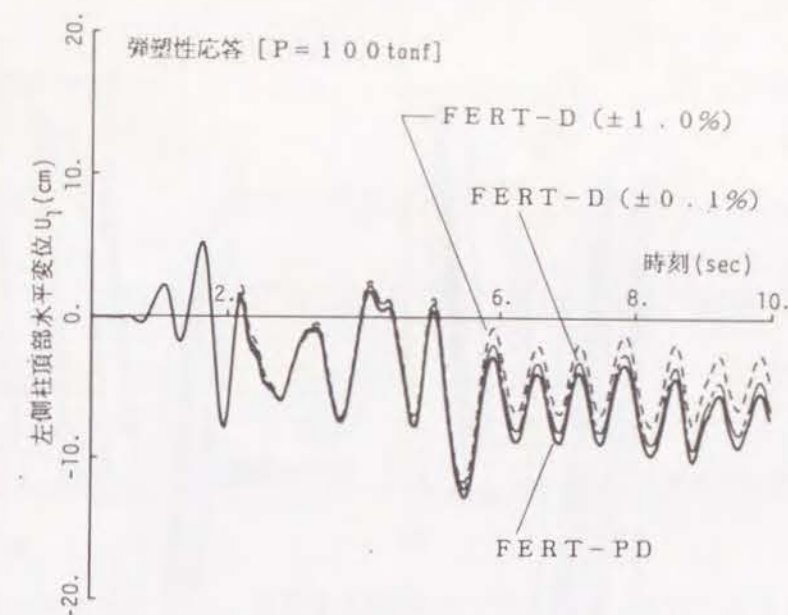
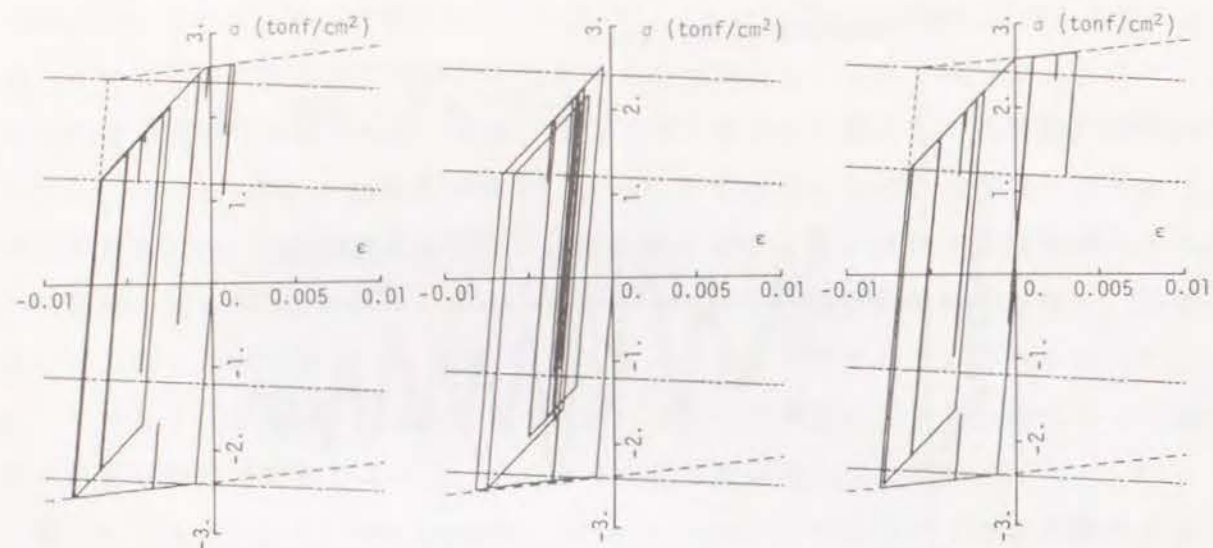


図-5.6 (つづき) 弾塑性応答における左側柱頂部水平変位の時刻歴



(a) FERT-PD (b) FERT-D (材料定数変更ひずみ幅を初期降伏ひずみの±1.0%とした場合) (c) FERT-D (材料定数変更ひずみ幅を初期降伏ひずみの±0.1%とした場合)

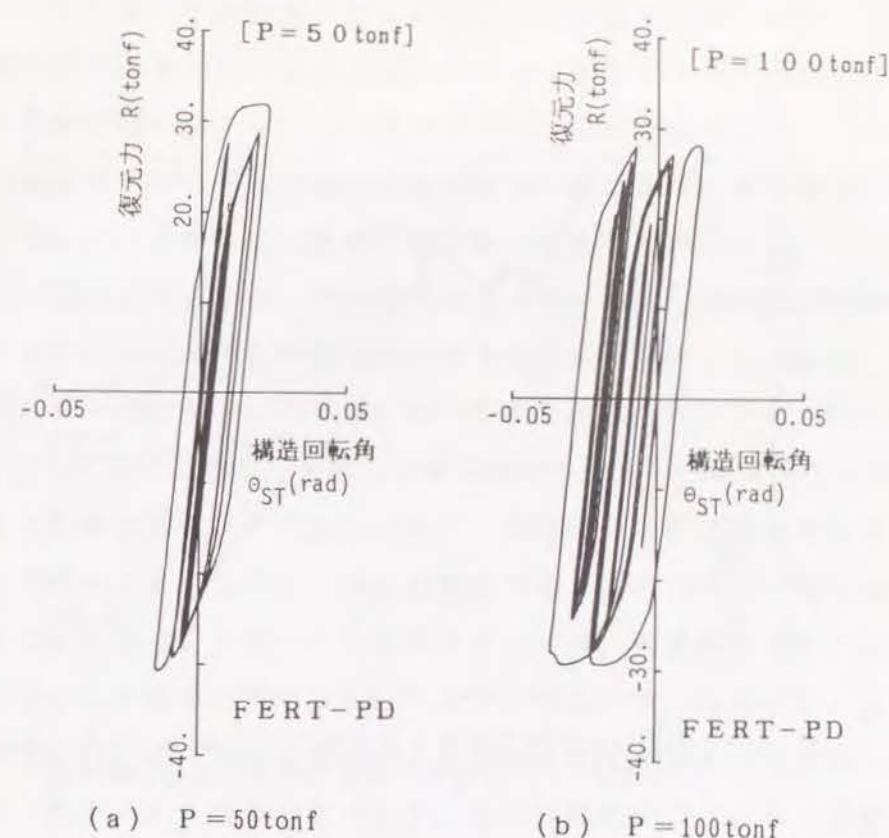
図-5.7 弾塑性応答における右側柱頂部要素の最右縁材料線要素の応力ひずみ履歴 (P=200tonf)

じた塑性変形誤差がほとんど以後の挙動にも残留している。また、同図(c)では、他の変位結果が55cm付近まで達するのに対し、FERT-Dの変更ひずみ幅±1%の結果は、5秒以後ほとんど塑性変形の蓄積が生じず、10秒時の変位は25cm程度にしか到っていない。

図-5.7は、P=200tonfのときの右側柱頂部要素の最右縁材料線要素の応力ひずみ関係を示している。図(a)はFERT-PDによる結果であり、図(b)、(c)はFERT-Dで材料定数変更ひずみ幅をそれぞれ±1%、±0.1%としたときの結果を示している。図(b)のFERT-Dの変更ひずみ幅±1%の結果はひずみのオーダーは他の結果とそれほど変わらないが、明らかに、材料定数変更幅を設けたことによる誤差が見られる。

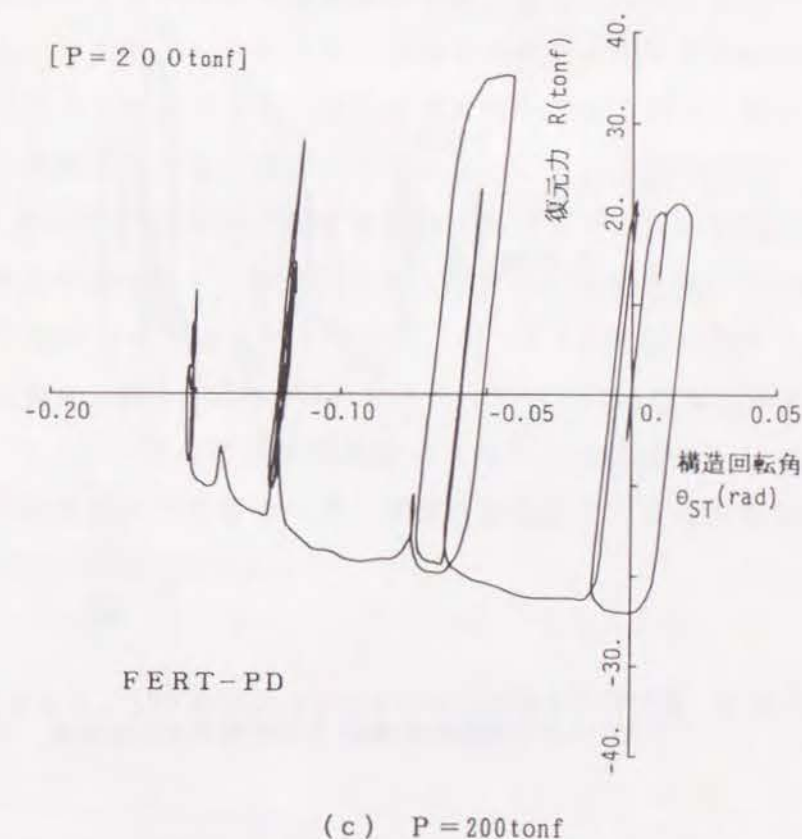
図-5.8(a)~(c)はFERT-PDによって解析されたPの異なる3個のモデルの復元力R-構造回転角 θ_{ST} 関係を示す。図(c)P=200tonfの曲線は、図-5.6の静的倒壊限界(一方向静的载荷時のF- θ_{ST} 曲線が θ_{ST} 軸を切る点)近傍まで θ_{ST} 値が進行し、骨組の耐力が低下していることを示している。

図-5.6, 5.7は、FERT-Dの材料線要素の応力ひずみ関係追跡精度を上げた解析結果がFERT-PDによる結果に近づくことを示している。このことは、FERT-PDが高い信頼性をもつこと、さらには応力ひずみ関係追跡精度を上げればFE



(a) P=50tonf

(b) P=100tonf



(c) P=200tonf

図-5.8 弾塑性応答における復元力Rと構造回転角 θ_{ST} の関係

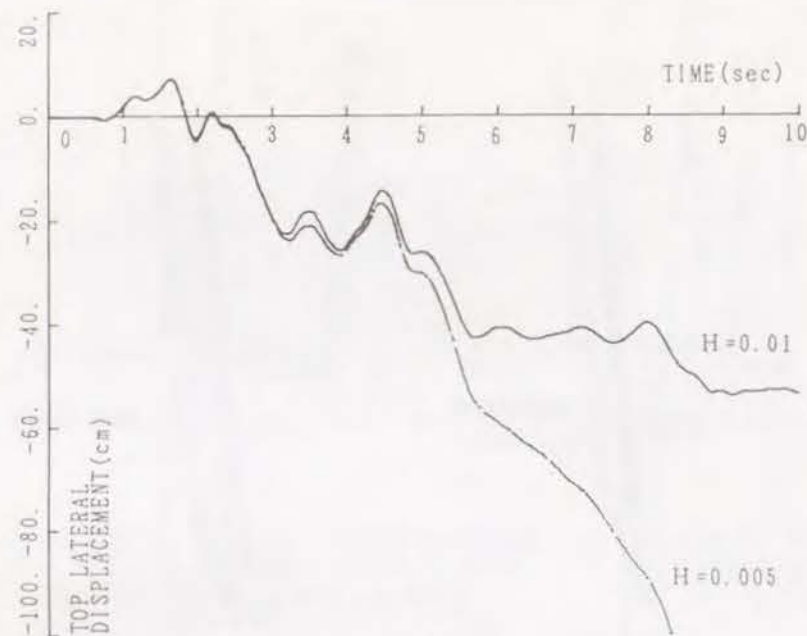


図-5.9 応力ひずみ関係における H を0.005, 0.01としたときの $P = 200\text{tonf}$ の骨組の左側柱頂部水平変位の時刻歴

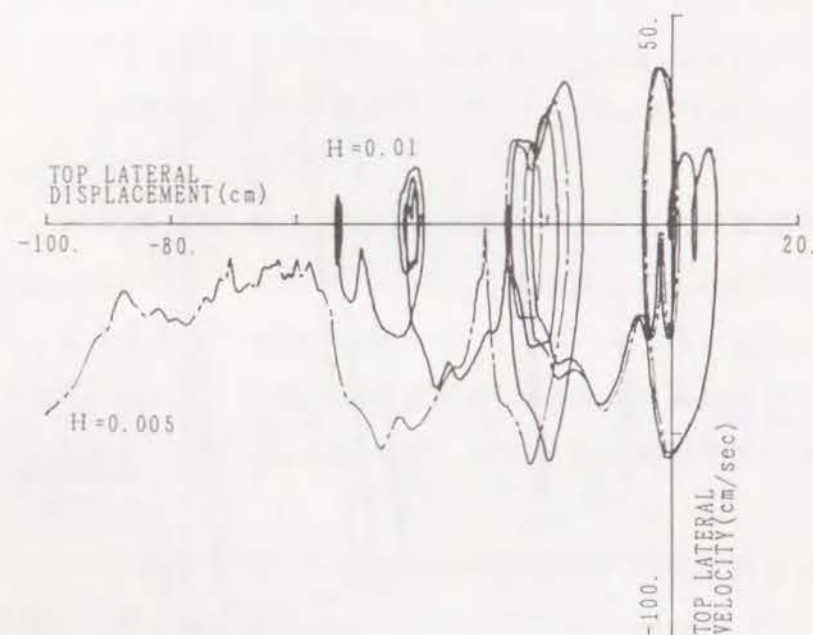


図-5.10 応力ひずみ関係における H を0.005, 0.01としたときの $P = 200\text{tonf}$ の骨組の左側柱頂部の水平方向相曲線

R T-Dでもかなり良い予測結果が得られることを示している。一方, F E R T-Dの材料線要素の応力ひずみ関係追跡精度のわずかな誤差が, 系全体の応答解析結果に大きな影響を及ぼす場合があることも観察された。動的弾塑性応答の予測を行う際には, 設定した履歴モデルの追跡精度の誤差管理を十分に行う必要があり, 特に, 倒壊近傍の挙動予測を行う場合には注意深い取り扱いが必要であろう。

$P = 200\text{tonf}$ の場合のF E R T-P Dのステップ数は3219, 計算時間は約54秒であった。一方, F E R T-Dで材料定数変更ひずみ幅を $\pm 1\%$ とした場合は, 1567ステップ, 約6秒の計算時間であり, $\pm 0.1\%$ とした場合は3011ステップ, 約8秒の計算時間であった。ここで採用した門形骨組は系座標数が6であり, F E R T-Dの各ステップで解かれるべき連立方程式の元数は小さく, 座屈等の不安定現象も含まれないものである。骨組規模が大きくなると, 系座標数は増加し, F E R T-Dにおける連立方程式の元数は大きくなる。一方, F E R T-P Dでは, 要素数の増加によって, 材料線要素の応力ひずみ関係を追跡するための高次方程式の数が増大する。もちろん, F E R T-Dでも応力ひずみ関係追跡精度をある程度満足させるためには, F E R T-P Dとほぼ同一のステップ数が必要である。所要計算時間は, これらの要因の兼ね合いで決まり, 本解析例における計算時間比がそのまま他の骨組の解析に当てはまるわけではない。また, F E R T-P Dでは, 時間刻み幅を決定するのに必要な高次方程式の数を低減することも可能であり, 材料線要素毎の高次方程式の解法手順を並列計算するなど, 工夫洗練する余地を残している。

図-5.9, 5.10に図-5.3の応力ひずみ関係における H を0.005とした $P = 200\text{tonf}$ の動的崩壊挙動の解析例を示す。解析法はF E R T-P Dを使用している。図-5.9は, 左側柱頂部水平変位の時刻歴を示している。図-5.6と縦軸のスケールが異なる。図中 $H = 0.01$ の曲線は, 図-5.6(c)のF E R T-P Dによる結果である。図-5.10は, $H = 0.01$ と $H = 0.005$ の場合の左側柱頂部の水平方向相曲線を示している。文献1)の強風下での弾塑性骨組の相曲線と同様, 崩壊型相曲線と非崩壊型相曲線が見られ, 臨界相曲線の存在を示唆している。

5.5 まとめ

本章では, まず, 増分摂動法による多自由度系の運動方程式の摂動展開表現を導き, 弾塑性骨組の高精度動的臨界挙動予測解析プログラムF E R T-P Dを作成した。次

に、門形平面鋼骨組の地震時挙動解析を行ない、F E R T - P D の有効性を既往の増分型平均加速度法を用いた F E R T - D との比較において検証した。

増分摂動法による運動方程式の解法は次のような特徴をもつ：

- (1) 各増分段階で変位の摂動係数ベクトルを求める主要演算は、質量行列の逆行列と外力、復元力、減衰力の摂動係数ベクトルとの積である。一般に、質量行列は応答解析時間を通じて一定であるので、その逆行列の計算は最初のステップで一度だけ行なっておけばよい。
- (2) 時間刻み幅は、各ステップの打ち切り誤差が予め設定された範囲内に収まるように、また材料の剛性係数変更点を精確に捉えるように自動決定される。
- (3) 増分摂動法の導入によって材料の応力ひずみ関係を極めて高精度に追跡することができ、従来の数値積分法では本質的に不可能であった動的弾塑性問題における材料非線形性の厳密な取り扱いを可能にした。

なお、F E R T - P から F E R T - P D を作成することは容易であり、F E R T - P プログラムの大部分をそのまま使用することができる。

また、門形平面鋼骨組の地震時弾塑性応答解析を、増分摂動法による F E R T - P D と増分型平均加速度法による F E R T - D とを用いてそれぞれ行なった。それらの応答解析結果との比較から、次の結論を得た：

- (4) F E R T - P D の動的弾塑性挙動の予測精度および解析法としての安定性は極めて高く、その解析結果は他の数値解法の予測精度を評価する基準として用いることができる。
- (5) 増分型平均加速度法を用いた F E R T - D でも、材料線要素の応力ひずみ関係追跡精度を上げる特別の工夫を講じれば、相当良好な応答予測がある程度可能である。しかし、この方法では理論的に除去不可能な誤差要因（例えば、材料線要素の除荷開始点予測に伴う誤差など）がなお存在するため、いかなる問題に対しても良好な予測精度が保証されとは限らない。
- (6) 例題で示した門形鋼骨組の地震時応答解析では、応力ひずみ関係の追跡精度のわずかな誤差が、系全体の応答予測結果に大きな影響を及ぼす場合があることが

観察された。他の解析手法を用いる場合にも、構成則が材料、要素あるいは部材などのいかなるレベルで与えられていようとも、設定した履歴モデルに関わる誤差を許容限度内に納め、要求に応じた追跡精度を確保する必要があると思われる。特に、倒壊近傍の挙動などを予測する場合には、この点に注意しなければならないであろう。

第2章で述べた弾塑性骨組の静的解析プログラム F E R T - P および本章で示した動的解析プログラム F E R T - P D は、予め設定された応力ひずみモデルを精度良く追跡し得る数値解析法である。もちろん実際の材料の応力ひずみ関係はそうしたモデルの履歴経路を厳密にたどるわけではなく、たとえば、降伏応力や勾配などもバラツキのある量である。しかし、そのようなバラツキが系全体の挙動に与える影響を評価するにしても、数値解析法そのものに起因する誤差をできる限り除去することによって初めて意味のある評価が可能となる。F E R T - P および F E R T - P D は、解析対象モデルが設定されれば、解析者の望む精度でそのモデルの挙動予測を与えることのできる数値解析法であり、その意味で極めて信頼性の高い解析法であると言える。

本論文では、弾塑性解析における整合剛性選択問題を初めて論理的に取り上げ、これまで剛性選択過程が複数の剛性係数の組み合わせの循環に陥っていた場合に対して、構成則に整合する剛性係数の組み合わせを合理的に選択することができる極めて効果的なアルゴリズムを提案している。さらに、そのアルゴリズムを組み込み、かつ増分摂動法を用いた定式化を行なうことによって、弾塑性平面骨組の臨界挙動を要求される精度をもって確実に予測解析が実行できる解析法を提示している。

本論文は、序章、本論全5章および結章から構成されている。第1章では、単純な弾塑性ばね柱モデルを用いて整合剛性選択問題を論じ、そのモデルにおける循環剛性選択過程のメカニズムを解明し、循環過程に陥ることなく整合剛性を見出す手順を考案した。第2章では、一次元有限要素を用いて平面骨組の複合非線形解析のための増分摂動法基礎式を誘導した。さらに、第1章の知見を基に整合剛性選択アルゴリズムを提案し、弾塑性骨組の静的臨界挙動予測解析プログラムFERT-Pを作成した。第3章では、単純な臨界挙動の解析結果を示し、FERT-Pの予測性能を検証するとともに、第2章で提案したアルゴリズムによって整合する剛性係数の組み合わせが極めて効果的に選択されていく過程を詳細に提示した。第4章では筋かい付鋼骨組の実験を対象とした解析結果を示し、FERT-Pの予測性能が極めて高いことを実証した。また、繰返し载荷を受ける骨組の新たな臨界挙動の解析結果を示した。第5章では、増分摂動法による多自由度系の運動方程式の摂動展開を示し、弾塑性骨組の動的臨界挙動予測解析プログラムFERT-PDを作成した。また、門形骨組の地震時弾塑性挙動をFERT-PDと増分型平均加速度法による解析プログラムとでそれぞれ解析した結果を比較検討し、動的臨界挙動予測解析における材料非線形性の厳密な取り扱いの重要性を指摘した。

本研究で得られた主な結論を以下にまとめる：

1. バイリニア力-縮み関係に従う2つのばねで支えられた剛体-ばね柱モデルにおいて、比較ばねの剛性係数の組み合わせによる剛性行列が正定値であれば、ばねの縮み速度に応じて剛性係数を変更することによって、構成則に整合する剛性係数の組

み合わせを選択することができる。一方、比較ばねの剛性係数の組み合わせによる剛性行列が正定値でなければ、循環剛性選択過程に陥るか、もしくは不整の全くない完全系として塑性分岐点を通る基本釣合経路を除いて正解の経路と接線の向きが剛体部の回転角について逆転する許容されない経路を辿る。循環剛性選択過程は2種類ある。一つは指定した増分方向に整合する剛性係数の組み合わせが存在しない過程であり、もう一つは、指定した増分方向に整合する剛性係数の組み合わせは存在するが、ばね縮み速度に応じて剛性係数を変更していく方法では、その整合する剛性係数の組み合わせを含まない複数の組み合わせを循環し、整合する組み合わせを見出せない過程である。比較ばねの剛性係数の組み合わせで系方程式における剛性行列が正定値でなくなった場合には、その剛性行列の負または0の固有値に対応する固有ベクトルで表わされるモードに適合するばね縮み速度から剛性係数の組み合わせを選択し、モードの非0成分のうちそのモードを代表する成分を制御変数とした解析を行えば、ばね縮み速度と剛性係数が整合する解が必ず得られる。この方法を用いれば、塑性分岐点からの一対の分岐経路もしくはその近傍の一対の許容される近似分岐経路を見出すこともできる。

2. 2つのばねがひずみ硬化ばねである剛体-ばね柱モデルで、ばねがひずみ硬化進行中で鉛直荷重が増加しているとき循環剛性選択過程に陥る要因は、ひずみ硬化進行中のばねの除荷開始点が精確に捉えられないことであることを明らかにした。このことは、材料の応力ひずみ関係における除荷開始点を精確に予測することができる増分摂動法を用いた解析を行えば、循環剛性選択過程に陥る可能性が極めて少なくなるという経験的事実に対して合理的な説明を与えるものである。また、塑性分岐点近傍ではばねの除荷開始状態と系方程式の剛性行列が正定値でなくなる状態とが極めて接近しており、僅かな誤差の存在によって循環剛性選択過程に陥る可能性がある。

3. 骨組の弾塑性解析において、系の比較体としての係数行列の最小固有値が0近傍の値となったとき、その最小固有値に対応する固有ベクトルがそれ以外の固有ベクトル成分に対して支配的となる状況と、剛体-ばね柱モデルにおける2個の固有ベクトル間の関係とが類似している。このことから、剛体-ばね柱モデルで明らかにされた剛性選択過程の基本的性質は骨組モデルも保有していると類推できる。それゆえ、剛体-ばね柱モデルで提案した整合剛性選択手順を拡張し、系の比較体としての係数行列が正定値でなくなった場合に、係数行列の負または0の固有値に対応する固有ベクトルで表わされるモードに適合する材料線要素のひずみ速度から剛性係数の組み合

わせを選択し、その後、モードを代表する適当な非0成分を制御変数とした変位制御解析を行なうという整合剛性選択アルゴリズムを提案した。このアルゴリズムを用いない場合に循環剛性選択過程に陥る例題を示し、循環過程に陥ると系の比較体としての係数行列が正定値でなくなることを示した。同一の例題について、提案したアルゴリズムを使用した場合には整合解が極めて効果的に見出される過程を示し、アルゴリズムの有効性を実証した。

4. 部材の座屈現象を含むような骨組の臨界挙動は、微小ひずみ大たわみ問題として取り扱え、その挙動予測解析法で移動座標系を採用することは精度を保つ上で効果的な方法である。移動座標系と固定座標系との座標変換行列の摂動展開は、行列を構成している周期関数の性質を利用すれば、その周期関数の2次の導関数まで求めておけばよい。さらに過去の知見から、移動座標系を採用した場合には、線形のひずみ変位関係式を用いても十分な精度が保持できる。これらの特性を活かすために、摂動演算を座標変換行列の摂動展開に集約する要素摂動方程式を示した。また、実用規模骨組の解析を行なうには、解くべき摂動方程式の元数を低減することは不可欠な要求であり、これを満たすために、隣合う要素端の状態量速度ベクトルの関係式を摂動展開し、伝達行列法を用いた部材摂動方程式の定式化が可能であることを示した。

5. 降伏点や除荷開始点の合理的予測によって材料履歴を正確に追跡できるように増分刻み幅を自動的に決定する機能を備え、さらに循環剛性選択過程に陥ることなく整合剛性を合理的に選択することのできるアルゴリズムをも有し、弾塑性骨組の臨界挙動を要求される精度をもって確実に予測解析することのできる静的弾塑性平面骨組解析法を完成した。この解析法の完成は、単なる精度上の改善ではなく従来の解析法では扱い得なかった問題を解くことを可能にしたという意味で画期的な発展といえる。

6. 増分摂動法による多自由度系の運動方程式の摂動展開表現を導き、動的臨界挙動予測のための高精度複合非線形解析法を提示した。この解析法では、各増分段階で変位の摂動係数ベクトルを求める主要演算が質量行列の逆行列と外力、復元力、減衰力の各摂動係数ベクトルとの積であり、質量行列は通常応答時間を通じて一定であるので、その逆行列の計算は最初のステップで一度だけ行なっておけばよい。各ステップでの誤差を制御しながら時間刻み幅を自動決定するので解の発散は全く問題とならない。また、増分摂動法の導入によって応力ひずみ関係モデルを極めて高精度に追跡することができ、従来の数値積分法では本質的に不可能であった動的弾塑性問題における材料非線形性の厳密な取り扱いを可能にした。

APPENDIX：弾塑性平面骨組の静的臨界挙動解析用プログラム F E R T - P の概要

本APPENDIXでは、まず、F E R T - P の25個のサブルーチン副プログラムの構成を示し、各副プログラムの実行内容を概説する。次に第2章図-2.3に示した整合剛性選択アルゴリズムを具体的にFORTRAN77でプログラム化したサブルーチン副プログラムCONSTを概説する。さらに、移動座標系の採用に伴う座標変換に関する摂動演算主要部であるサブルーチン副プログラムPHAT1, TRMAT0を示す。

A.1 F E R T - P のサブルーチン副プログラムの構成と各副プログラムの内容

FORTRAN77でプログラム化されたF E R T - P プログラムは、図-A.1に示す樹状構造を有しており、主プログラムと25個のサブルーチン副プログラムから成っている。主プログラムからは、15個のサブルーチン副プログラムが直接引用されている。図-A.2は、第2章図-2.4の概略流れ図と主プログラムから直接引用される15個のサブルーチン副プログラムとの対応関係を示している。

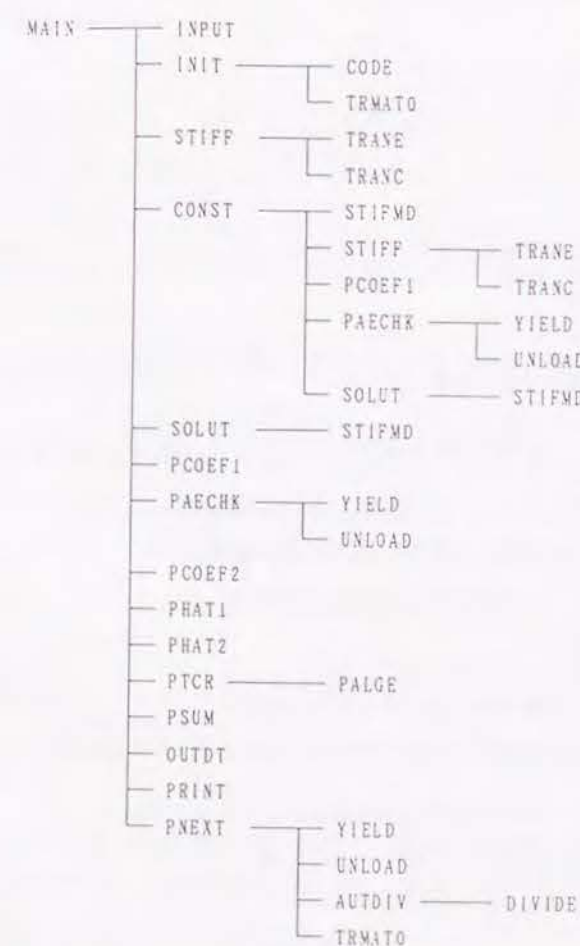
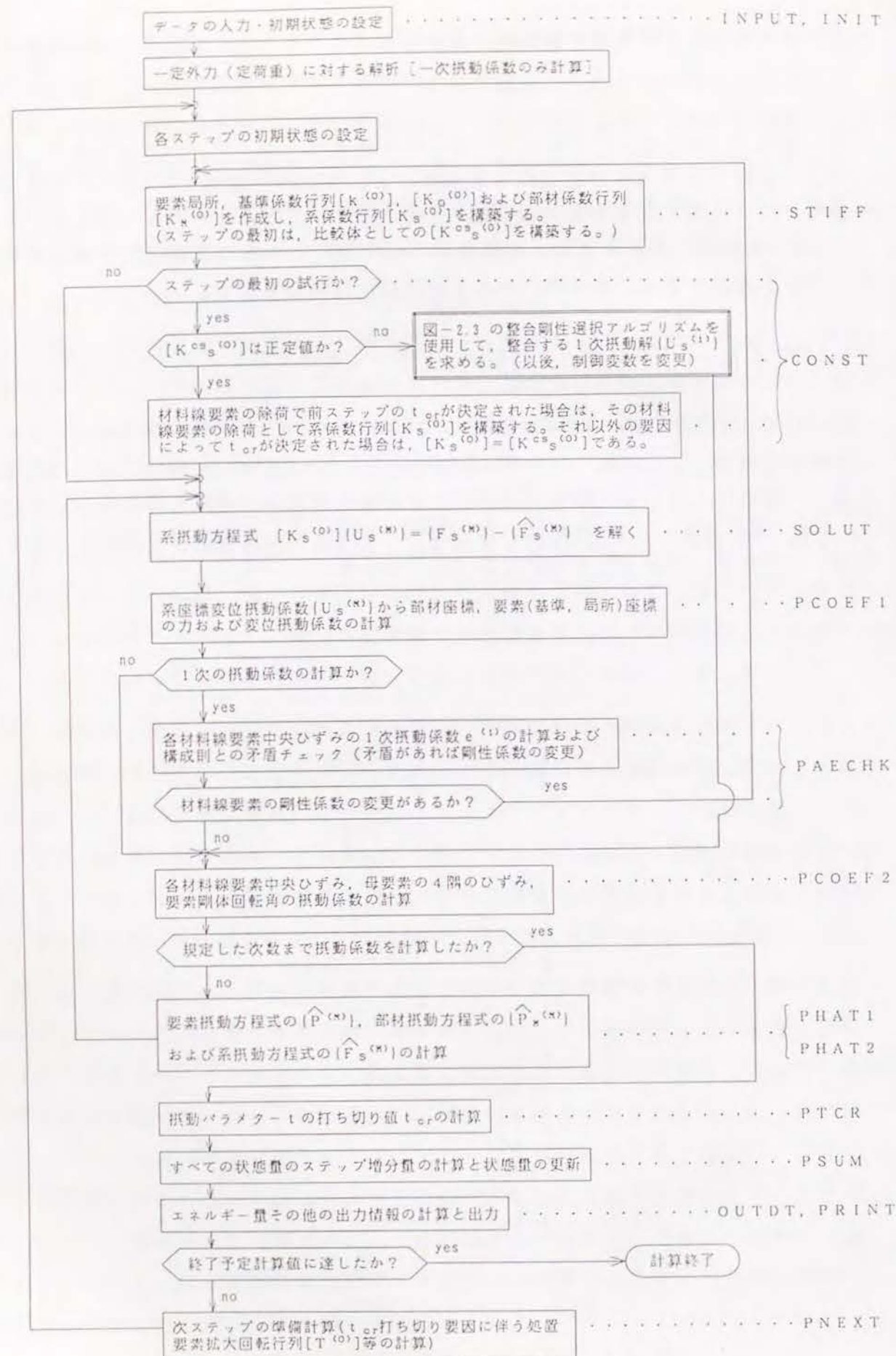


図-A.1 F E R T - P のプログラム・ユニットの構成



サブルーチン副プログラム一覧表

サブルーチン名	実行内容の概要
AUTDIV	部材の母要素の分割によって, 新たに生じた子要素と分割後の母要素の状態量の設定する。
CONST	図-2.3の整合剛性選択アルゴリズムを具体的にプログラム化したサブルーチン副プログラムで, 弾塑性比較体の係数行列の正定値性を調べる。正定値である場合は, LDL ^T 分解を行ない摂動方程式を解く準備をする。正定値でない場合には整合剛性係数行列を見出し, 系座標変位の 1 次摂動係数を求める。
CODE	部材座標と系座標を関係づけるコード・システムを作成する。
DIVIDE	部材の母要素の分割によって, 新たに生じた子要素と分割後の母要素の局所および基準座標に関する要素端変位, 要素端力を計算する。
INIT	入力情報から, 解析に必要な諸量を算定する。また, 初期値を設定する。
INPUT	解析対象骨組モデルの必要諸量を入力する。
OUTDT	エネルギー諸量等の 2 次的な出力情報を算定する。
PAECHK	材料線要素のひずみの 1 次摂動係数を算定し, その材料線要素の剛性係数と構成則に関して矛盾していないかどうかを調べる。矛盾している材料線要素があれば, ひずみの 1 次摂動係数の符号にしたがって, 剛性係数を変更する。
PALGE	摂動パラメータ t の打ち切り条件式(2.62)~(2.64)などの t の高次方程式を解く。
PCOEF1	系座標変位の摂動係数から, 部材座標変位および力の摂動係数, 要素基準座標変位および力の摂動係数, 要素局所座標変位および力の摂動係数までを求める。

図-A.2 FERT-P の概略流れ図とサブルーチン副プログラムの対応関係

サブルーチン名	実行内容の概要
PCOE2	ひずみの2次以上の摂動係数, 応力の摂動係数, 要素の剛体回転角の摂動係数を求める。
PHAT1	要素摂動方程式(2.36)の $\{\hat{P}^{(M)}\}$ を式(2.37)より計算する。
PHAT2	$\{\hat{P}^{(M)}\}$ から, 系摂動方程式の $\{\hat{F}_S^{(M)}\}$ を計算する。
PNEXT	次のステップの準備計算を行なう。
PRINT	要求される情報をプリント出力する。
PSUM	各ステップ終了時の状態量を計算する。
PTCR	2.4節の摂動パラメータ t の打ち切り条件にしたがって, 増分長 t_{cr} を決定する。
SOLUT	系摂動方程式を解く。
STIFF	式(2.36)の要素係数行列から, 部材および系係数行列までを計算する。
STIFMD	文献25)にしたがって, 系摂動方程式を係数行列の対称バンド性が保持されるように並べ換える。
TRANE	要素の格間伝達行列式(2.46)の計算を行なう。
TRANC	式(2.58)の計算を行ない, 部材の係数行列を求める。
TRMAT0	要素拡大回転行列の摂動展開式(2.25)に現われる2次までの偏導関数行列を計算する。
UNLOAD	材料線要素の除荷に伴う剛性係数等の変更を行なう。
YIELD	材料線要素の降伏, 硬化係数の変更点に伴う諸量を変更する。

A.2 整合剛性選択アルゴリズムのプログラム化

サブルーチン副プログラムSTIFF: 前ステップの t_{cr} が, ある材料線要素の降伏で決定された場合には, その材料線要素の剛性係数を塑性剛性係数に変更し, 除荷によって決定された場合(ITCR=3)には, その材料線要素の剛性係数は塑性剛性係数のままとして, 弾塑性比較体の係数行列 $[K^{CS(0)}]$ (配列名: SSTF)を作成する。

サブルーチン副プログラム CONST (弾塑性比較体の係数行列 $[K^{CS(0)}]$ の正定値性をLDLT分解を行なうことによって調べる。正定値であれば, 前ステップの t_{cr} が除荷によって決定された場合のみ改めてその材料線要素の除荷を認めた係数行列 $[K_S^{(0)}]$ を作成し, LDLT分解を行なう。他の場合は $[K^{CS(0)}]$ のLDLT分解をもって主プログラムに戻る。正定値でない場合には最小固有値に対する固有ベクトルを用いて, 整合剛性係数の組み合わせを得る。)

```

1  SUBROUTINE CONST(仮引数)
2  COMMON文
3  DIMENSION文
4  C
5  IF(ICONT,EQ.0) THEN <荷重制御(ICONT=0)のとき>
6  C
7      DO 10 I=1,LSN (係数行列の1次元配列数LSNについて実行)
8          STFL(I)=SSTF(I) 弾塑性比較体の1次元配列された係数(剛性)行列SSTFを作業用の
                              1次元配列STFLに格納する。
9      CONTINUE
10     NSQ=NS
11 ELSE <変位制御(ICONT=1)のとき>
12 C-SUB
13     CALL STIFMD(仮引数) 文献25)にしたがって, 係数行列の対称バンド性を保持するよう系摂動方程式を
                              並べ換えたときの弾塑性比較体の1次元配列された係数行列SSTFB(次数NS-1)
                              の作成。
14     DO 20 I=1,LSN1 (係数行列の1次元配列数LSN1について実行)
15         STFL(I)=SSTFB(I) 弾塑性比較体の1次元配列された係数行列SSTFBを作業用の
                              1次元配列STFLに格納する。
16     CONTINUE
17     NSQ=NS1
18 ENDIF
19 C-SSL* 正定値対称バンド行列のLDLT分解(変形コレスキー法) DSBOL(39)
20 CALL DSBOL(STFL,NSQ,IHB,1,DD-15,1,ICON)

```

$A = LDL^T$

STFL...入力: 行列A, 出力: 行列Lと行列D⁻¹
対称バンド行列用圧縮モードによる
1次元配列

NSQ...入力: 行列Aの次数n,

IHB...入力: 下バンド幅h,

1.0D-15...入力: ピボットの相対零判定値
(≥ 0.0)

ICON...出力: コンディションコード, 表-(a)

表-(a) コンディションコード

コード	意味	処理内容
0	エラーなし	
10000	ピボットが負となった, 係数行列が正定値でない	処理は続行する。
20000	ピボットが相対的に零と なった, 係数行列は非正 則の可能性が高い,	処理を打ち切る。
30000	IHB<0, IHB \geq NS	処理を打ち切る。


```

17 C IF(ICON.EQ.0) THEN <弾塑性比較体の係数行列  $[K^{(0)}$ ] が正定値であるとき>
18 C
19 C-SUB IF(ITCR.EQ.3) THEN <前ステップの  $t_{cr}$  が、ある材料線要素の除荷が生じると予想したことによって
        決定されたとき>
        CALL STIFF(仮引数) 除荷が生じるとして、その材料線要素の剛性係数を変更し係数(剛性)行列
         $[K^{(0)}$ ] (配列名: SSTF) を作成。
        4~16の文。端末文番号は変更。: 係数行列  $[K^{(0)}$ ] の LDLT 分解
20
21 ENDIF
22 RETURN : → メインプログラムへ。サブルーチンプログラム SOLUT で  $\{U_s^{(1)}\}$  を求める。
23 C ELSE IF(ICON.NE.30000) THEN <弾塑性比較体の係数行列  $[K^{(0)}$ ] が正定値でないとき>
24 C
25 4~15の文、ただし10の文は除く。端末文番号は変更。
    IVW=MAX(3*NSD+2*5, 2*NSD*(IHB+1))
26 C-SSL* 実対称バンド行列の固有値・固有ベクトル DBSEG [39]
    CALL DBSEG(STFL, NSD, IHB, -5, 5, -1.0, EIG, EIGV, NSD, IVW, ICOND)
    STFL... 入力: 実対称バンド行列Aの対称バンド行列用圧縮モードによる1次元配列。
    NSD... 入力: 行列Aの次数n。
    IHB... 入力: 下バンド幅h。
    -5... 入力: 求める固有値の個数。この場合は小さい方から5個求めている。
    5... 入力: 求める固有ベクトルの個数。この場合は小さい方から5個求めている。
    -1.0... 入力: 固有値の収束判定に使われる絶対誤差の上限、負の値を入れると標準値が設定される。
    EIG... 出力: 固有値。大きさ5の1次元配列。
    EIGV... 出力: 固有ベクトル。固有ベクトルは列方向に格納される。EIGV(NSD, 5)なる2次元配列。
    NSD... 入力: 配列EIGVの整合寸法。
    IVW... 作業領域: 25の文で算定される。
    ICOND... 出力: コンディションコード。
27 IF(EIG(2).LE.0) THEN <負のまたは0の固有値を2個以上もっているとき>
28
    5個の固有値と対応する固有ベクトルをプリント出力し、計算を終了する。
    (係数行列が負または0の固有値を2個以上もっているときは、それらの固有値に対応する固有ベクトルの線形結合を用いて、ここでのアルゴリズムを拡張すれば、整合剛性係数の組み合わせを見出すことができると予想される。これまでに0または負の固有値を2個以上もつ場合に遭遇したことはない。)
29 C
30 C ELSE <負または0の固有値  $\mu_1$  を1個もつとき>
31 C
32 IPASS=0 IPASS: 整合剛性であることが確認された釣合経路の数
33 DO 1000 J=1, NMP (要素の全ての材料線要素について実行)
34 DO 1000 I=1, NE (全ての要素について実行)
35 IFSCK(I, J, 1)=IFS(I, J) IFS: 材料線要素が現在選択している剛性係数を示すindex
    IFSCK: 弾塑性比較体であるときの材料線要素の剛性係数index
36 CONTINUE
37 DO 1500 ITRY=1, 2 (固有値  $\mu_1$  に対応する固有ベクトル  $\{\phi_1\}$  について、
    ITRY=1のとき  $\{U_s^{(1)}\} = -\{\phi_1\}$ , ITRY=2のとき  $\{U_s^{(1)}\} = \{\phi_1\}$ 
    として、整合剛性係数の組み合わせを探索する。)

```

```

36 IF(ICON.EQ.0) THEN <荷重制御(ICON=0)のとき>
37 DO 1510 I=1, NS (全ての系座標について実行)
38 U(I, I)=(-1)**FLOW(ITRY)*EIGV(I, 1)  $\{U_s^{(1)}\} = (-1)^{ITRY} \{\phi_1\}$ 
39 CONTINUE
40 ELSE <変位制御(ICON=1)のとき>
41 DO 1520 I=1, NS (全ての系座標について実行)
42 IF(I.LT.IRD) U(I, I)=(-1)**FLOW(ITRY)*EIGV(I, 1) IRD: 変位を制御する系座標番号
43 IF(I.EQ.IRD) U(I, I)=0.0  $\{U_s^{(1)}\} = (-1)^{ITRY} \{\phi_1\}$ 
44 IF(I.GT.IRD) U(I, I)=(-1)**FLOW(ITRY)*EIGV(I-1, 1)
45 CONTINUE
46 ENDIF
47 IF(ITRY.EQ.1) THEN
48 UMAX=0.0
49 DO 1530 I=1, NS (全ての系座標について実行)
50 IF(ABS(U(I, I)).GT.ABS(UMAX)) THEN 固有ベクトル  $\{\phi_1\}$  を代表する(絶対値が
51 UMAX=U(I, I) 最大となる)座標を選び、その座標の変
52 IRD=I 位を制御する。
53 ENDIF
54 CONTINUE
55 新に設定された変位制御座標番号と固有ベクトル  $\{\phi_1\}$  を系座標変位の1次振動係数としたときの
    系座標変位をプリント出力する。
56 ICONT=1 変位制御を用いる
57 ENDIF
58 C-SUB CALL PCOE1(仮引数)
59 C-SUB CALL PAECK(仮引数)
60 C
61 INOP=0
62 INC=1
    ZUR=SIGN(1.0, (-1.0)**FLOW(ITRY)*EIGV(IRD, 1))
63 CONTINUE
64 CALL STIFF(仮引数)
65 10~16の文、ただし15の文は除く。端末文番号は変更。
66 C-SUB CALL SOLUT(仮引数)

```


67	C-SUB	CALL PCOEF1(仮引数)
68	C-SUB	CALL PAEGHK(仮引数)
69	C	IF(IWR,EQ,0) THEN <整合剛性係数の組み合わせが見出されたとき> IWR: 剛性係数と矛盾したひずみ速度となった材料線要素の数
70		IPASS=IPASS+1
71		DO 2500 I=1, NS (全ての系座標について実行)
72		UC(I)=U(1, I) 整合剛性係数の組み合わせによる系座標変位の1次摂動係数($U_{(1)}$)を記憶
73	2500	CONTINUE
74		H((IPASS=2であった解析の後、初めに得られた整合剛性釣合経路を採用するときは、ここでRETURNする))
75		IF(ITRY,EQ,1) THEN
76		GO TO 1500 【もう1つ整合剛性釣合経路が存在するかどうかを調べる】
77		ELSE
78		整合剛性であることが確認された釣合経路の数(IPASS)をプリント出力。 DO 2550 I=1, NS
79		U(1, I)=UC(I) 系座標変位の1次摂動係数($U_{(1)}$)として記憶しておいた値を採用 H((IPASS=2のときは、荷重勾配の小さい解を採用するような判定を設けることも 考えられる。))
80	2550	CONTINUE
81		RETURN → メインプログラムへ。再びサブルーチンプログラムPCOEF1から実行。
82		ENDIF
83		ELSE
84		INOP=INOP+1
85		IF(INOP,GT,20) THEN
86		剛性選択過程が、整合剛性も見出せず、循環過程に陥ったことも確認できず、 整合剛性探索のための繰り返し計算が、20回を超えたことをプリント出力し、計算を終了する。 (これまでのところ、この判定により計算が打ち切られたことはない。)
87		ELSE
88		DO 2250 NN=1, INC (このステップでここまでに候補となった剛性係数の組の数について実行)
89		DO 2200 J=1, NMP (要素の全ての材料線要素について実行)
90		DO 2200 I=1, NE (全ての要素について実行)
91		IF(IFS(I, J), NE, IFSC(I, J, NN)) THEN
92		GO TO 2250 ここまでに候補となった材料線要素の剛性係数の組み合わせと異なる
93		ENDIF
94	2200	CONTINUE
95		GO TO 2270 ここまでに候補となった材料線要素の剛性係数の組み合わせと同じ <循環過程に陥ったことを確認>
96	2250	CONTINUE

97		INC=INC+1
98		DO 2260 J=1, NMP (要素の全ての材料線要素について実行)
99		DO 2260 I=1, NE (全ての要素について実行)
100		IFSC(I, J, INC)=IFS(I, J)
101	2260	CONTINUE
102		GO TO 2000 【SUB STIFFに戻り、IFSの指示にしたがって係数行列を作成する。】
103	C	CONTINUE
104	2270	CONTINUE
105		IF(ITRY,EQ,1) THEN
106		剛性選択過程が、循環過程に陥ったことをプリント出力する。 GO TO 1500 【固有ベクトル $\{\phi_i\}$ の符号を変えたもう一つの変形モードで 整合剛性係数の組み合わせを探す。】
107		ELSE
108		IF(IPASS,EQ,0) THEN <整合剛性係数の組み合わせが見出せなかったとき>
109		± $\{\phi_i\}$ それぞれを用いた整合剛性選択過程が、2通りとも循環過程に陥ったことを プリント出力し、計算を終了する。 (これまでのところ、この判定により計算が打ち切られたことはない。)
110		ELSE
111		整合剛性であることが確認された釣合経路の数(IPASS=1)をプリント出力。 DO 2560 I=1, NS
112		U(1, I)=UC(I)
113		CONTINUE
114	2560	RETURN → メインプログラムへ。再びサブルーチンプログラムPCOEF1から実行。
115		ENDIF
116		ENDIF
117		ENDIF
118		ENDIF
119		ENDIF
120	1500	CONTINUE
121		ENDIF
122		ELSE <ICON=30000>
123		入力ミスであることをプリント出力し、計算を終了する。
124		ENDIF
125	C	END

A.3 移動座標系の採用に伴う座標変換に係る振動演算主要部

サブルーチンプログラム PHAT1 (要素振動方程式: $[K_a^{(0)}] \{D^{(M)}\} = \{P^{(M)}\} - \{\hat{P}^{(M)}\}$ ($M=1, 2, \dots$) (2.35) の $\{P^{(M)}\}$ を次の(2.37)にしたがって計算する。

$$\begin{aligned} \{P^{(M)}\} = & \sum_{k=1}^{M-1} \left([T^{(M-k)}]^T \left\{ \sum_{j=1}^n a_j \int_0^{B_j} \sigma_j^{(k)} dx \right\} \right. \\ & + [T_{\theta R}]^T \{P^{(0)}\} [R^{(M-k)}]^T \{D^{(k)}\} \\ & + [T_{u_0}]^T \{P^{(0)}\} [I \ 0 \ 0] [T^{(M-k)}] \{D^{(k)}\} + [T^{(k)}]^T \{P^{(M-k)}\} \\ & \left. + [T^{(0)}]^T \left\{ \sum_{j=1}^n a_j \int_0^{B_j} \sigma_j^{(M)} dx \right\} + [\hat{T}^{(M)}]^T \{P^{(0)}\} \right) \quad (M=2, 3, \dots) \end{aligned}$$

なお、ここでは3次の振動係数まで求める場合について示す。

```

1  SUBROUTINE PHAT1(仮引数)
2  COMMON文
3  DIMENSION文
4  C
5  DO 10 JJ=1,3
6  DO 10 II=1,6
7  DO 10 I=1,NE (全ての要素について実行)      IPB: 振動次数
8  TT(IPB, I, II, JJ)=TROT(I, II, JJ)*ROT(IPB, I)
9  +TUA(I, II, JJ)*DL(IPB, I, 1)+TTH(I, II, JJ)
10 CONTINUE
11 DO 20 J=1,6
12 DO 20 I=1,NE (全ての要素について実行)
13 RV(IPB, I, J)=-TT(IPB, I, J, 2)
14
15 20 CONTINUE
16 C
17 IF(IPB, EQ, 1) THEN <振動次数が1次のとき> 2次の振動解を求めるための準備
18 DO 30 JJ=1,3
19 DO 30 II=1,6
20 DO 30 I=1,NE (全ての要素について実行)
21 TTH(I, II, JJ)=0.5*TROT2(I, II, JJ)*ROT(1, I)*2
22 +TRUA(I, II, JJ)*ROT(1, I)*DL(1, I, 1)
23 -TUA(I, II, JJ)*DL(1, I, 1)*2/ELL(1)
24
25 CONTINUE
26 END IF
27 IF(IPB, EQ, 2) THEN <振動次数が2次のとき> 3次の振動解を求めるための準備
28 DO 35 JJ=1,3
29 DO 35 II=1,6
30 DO 35 I=1,NE (全ての要素について実行)
31 TTH(I, II, JJ)=TROT2(I, II, JJ)*ROT(1, I)*ROT(2, I)
32 +TRUA(I, II, JJ)*ROT(1, I)*DL(2, I, 1)+ROT(2, I)*DL(1, I, 1)
33 -2.0*TUA(I, II, JJ)*DL(1, I, 1)*DL(2, I, 1)/ELL(1)
34 -TROT(I, II, JJ)*ROT(1, I)*3/6.0-0.5*TUA(I, II, JJ)*ROT(1, I)*2*DL(1, I, 1)
35 -TRUA(I, II, JJ)*ROT(1, I)*DL(1, I, 1)*2/ELL(1)+TUA(I, II, JJ)*DL(1, I, 1)*3/(ELL(1)*2)
36 CONTINUE
37 END IF

```

$TT: [T^{(M-1)}]^T$ の計算
 $TROT: [T_{\theta R}]^T$
 $ROT: \Theta_R^{(M-1)}$
 $TUA: [T_{u_0}]^T$
 $DL_1: u_0^{(M-1)}$
 $TTH: [T^{(M-1)}]^T$
 $RV: [R^{(M-1)}]^T$ の計算

$TTH: [\hat{T}^{(1)}]^T$ の計算
 $TROT2: [T_{\theta R R}]^T$
 $TRUA: [T_{\theta R U_0}]^T$
 $ELL: L(\text{要素長}) + u_0$

$TTH: [\hat{T}^{(2)}]^T$ の計算

```

26 DO 100 II=1,6
27 DO 100 I=1,NE (全ての要素について実行)
28 PH(I, II)=0.0
29 100 CONTINUE
30 C
31 MM=IPB+1
32 C
33 DO 110 KP=1, IPB
34 MK=MM-KP
35 DO 115 J=1,3
36 DO 115 I=1,NE (全ての要素について実行)
37 VC(I, J)=0.0
38
39 115 CONTINUE
40 DO 120 LP=1, KP
41 KL=KP-LP
42 DO 130 J=1,3
43 DO 130 I=1,NE (全ての要素について実行)
44 VC(I, J)=VC(I, J)+FLOAT(LP)/FLOAT(KP)*
45 (TT(KL, I, 1, J)*D(LP, I, 1)+TT(KL, I, 2, J)*D(LP, I, 2)
46 +TT(KL, I, 3, J)*D(LP, I, 3)+TT(KL, I, 4, J)*D(LP, I, 4)
47 +TT(KL, I, 5, J)*D(LP, I, 5)+TT(KL, I, 6, J)*D(LP, I, 6))
48
49 130 CONTINUE
50 120 CONTINUE
51 DO 140 J=1,3
52 DO 140 I=1,NE (全ての要素について実行)
53 VCK(I, J)=ESTF(1, J, 1)*VC(I, 1)
54 +ESTF(1, J, 2)*VC(I, 2)+ESTF(1, J, 3)*VC(I, 3)
55
56 140 CONTINUE
57 DO 150 J=1,6
58 DO 150 I=1,NE (全ての要素について実行)
59 PH(I, J)=PH(I, J)+FLOAT(KP)/FLOAT(MM)*
60 (TT(MK, I, J, 1)*VCK(I, 1)+TT(MK, I, J, 2)*VCK(I, 2)
61 +TT(MK, I, J, 3)*VCK(I, 3))
62
63 150 CONTINUE
64 110 CONTINUE
65 C
66 DO 200 KP=1, IPB
67 MK=MM-KP
68 DO 210 J=1,3
69 DO 210 I=1,NE (全ての要素について実行)
70 VC(I, J)=PL(0, I, J)*
71 (RV(MK, I, 1)*D(KP, I, 1)+RV(MK, I, 2)*D(KP, I, 2)
72 +RV(MK, I, 3)*D(KP, I, 3)+RV(MK, I, 4)*D(KP, I, 4)
73 +RV(MK, I, 5)*D(KP, I, 5)+RV(MK, I, 6)*D(KP, I, 6))
74
75 210 CONTINUE
76 200 CONTINUE

```

$\sum_{k=1}^{M-1} ([T^{(M-k)}]^T \{P^{(0)}\} [R^{(M-k)}]^T \{D^{(k)}\})$ の計算

$\sum_{k=1}^{M-1} ([T_{\theta R}]^T \{P^{(0)}\} [R^{(M-k)}]^T \{D^{(k)}\})$ の計算


```

59      DO 250 J=1,6
60      DO 250 I=1,NE (全ての要素について実行)
61      PH(I,J)=PH(I,J)+FLOAT(KP)/FLOAT(MM)*
        (TROT(I,J,1)*VC(I,1)+TROT(I,J,2)*VC(I,2)
        +TROT(I,J,3)*VC(I,3))
62      250 CONTINUE
63      200 CONTINUE
C
64      DO 300 KP=1,IPB
65      MK=MM-KP

$$\sum_{k=1}^{M-k} ([T, u_a]^T \{p^{(k)}\} \{1 \ 0 \ 0\} [T^{(M-k)}] [D^{(k)}]) \text{ の計算}$$

66      DO 310 J=1,3
67      DO 310 I=1,NE (全ての要素について実行)
68      VC(I,J)=PL(D,I,J)*
        (TT(MK,1,1,1)*D(KP,1,1)+TT(MK,1,2,1)*D(KP,1,2)
        +TT(MK,1,3,1)*D(KP,1,3)+TT(MK,1,4,1)*D(KP,1,4)
        +TT(MK,1,5,1)*D(KP,1,5)+TT(MK,1,6,1)*D(KP,1,6))
69      310 CONTINUE
70      DO 350 J=1,6
71      DO 350 I=1,NE (全ての要素について実行)
72      PH(I,J)=PH(I,J)+FLOAT(KP)/FLOAT(MM)*
        (TUA(I,J,1)*VC(I,1)+TUA(I,J,2)*VC(I,2)
        +TUA(I,J,3)*VC(I,3))
73      350 CONTINUE
74      300 CONTINUE
C
75      DO 400 KP=1,IPB
76      MK=MM-KP

$$\sum_{k=1}^{M-k} ([T^{(k)}]^T \{p^{(M-k)}\}) \text{ の計算}$$

77      DO 410 J=1,6
78      DO 410 I=1,NE (全ての要素について実行)
79      PH(I,J)=PH(I,J)+FLOAT(KP)/FLOAT(MM)*
        (TT(KP,1,J,1)*PL(MK,1,1)+TT(KP,1,J,2)*PL(MK,1,2)
        +TT(KP,1,J,3)*PL(MK,1,3))
80      410 CONTINUE
81      400 CONTINUE
C
82      DO 500 KP=1,IPB
83      MK=MM-KP

$$[T^{(0)}]^T \{ \sum_{j=1}^n a_j \int_0^1 [B_j] \hat{\sigma}_j^{(M)} dx \} \text{ の計算}$$

84      DO 510 J=1,3
85      DO 510 I=1,NE (全ての要素について実行)
86      VC(I,J)=TT(MK,1,1,J)*D(KP,1,1)+TT(MK,1,2,J)*D(KP,1,2)
        +TT(MK,1,3,J)*D(KP,1,3)+TT(MK,1,4,J)*D(KP,1,4)
        +TT(MK,1,5,J)*D(KP,1,5)+TT(MK,1,6,J)*D(KP,1,6)
87      510 CONTINUE

```

```

87      DO 520 J=1,3
88      DO 520 I=1,NE (全ての要素について実行)
89      VCK(I,J)=ESTF(I,J,1)*VC(I,1)+ESTF(I,J,2)*VC(I,2)
        +ESTF(I,J,3)*VC(I,3)
90      520 CONTINUE
91      DO 550 J=1,6
92      DO 550 I=1,NE (全ての要素について実行)
93      PH(I,J)=PH(I,J)+FLOAT(KP)/FLOAT(MM)*
        (TT(D,1,J,1)*VCK(I,1)+TT(D,1,J,2)*VCK(I,2)
        +TT(D,1,J,3)*VCK(I,3))
94      550 CONTINUE
95      500 CONTINUE
C
96      DO 600 J=1,6
97      DO 600 I=1,NE (全ての要素について実行)
98      PH(I,J)=PH(I,J)+TTH(I,J,1)*PL(D,1,1)
        +TTH(I,J,2)*PL(D,1,2)+TTH(I,J,3)*PL(D,1,3)
99      600 CONTINUE
100      RETURN
101      END

```

$[T^{(M)}]^T \{p^{(0)}\}$ の計算

サブルーチン副プログラムTRMATD (次ステップ開始時の要素拡大回転行列[T]と[R]の設定とそれらの振動係数演算のための2次までの偏導関数の計算)

```

1      SUBROUTINE TRMATD(仮引数)
2      COMMON文
3      DIMENSION文
C
4      DO 10 I=1,NE (全ての要素について実行)
5      S=SIN(ROT(D,I))
6      C=COS(ROT(D,I))
7      ELL(I)=EL(I)+DL(D,I,1)
8      TT(D,1,1,1)=C
9      TT(D,1,1,2)=S/ELL(I)
10     TT(D,1,1,3)=S/ELL(I)
11     TT(D,1,2,1)=S
12     TT(D,1,2,2)=-C/ELL(I)
13     TT(D,1,2,3)=-C/ELL(I)
14     TT(D,1,3,3)=1.0
15     TT(D,1,6,2)=1.0
16     TROT(I,1,1)=-S
17     TROT(I,1,2)=C/ELL(I)
18     TROT(I,1,3)=C/ELL(I)
19     TROT(I,2,1)=C
20     TROT(I,2,2)=S/ELL(I)
21     TROT(I,2,3)=S/ELL(I)

```

S: 要素基準座標軸と要素局所座標軸とのなす角(要素剛体回転角 $\Theta_R^{(0)}$)の正弦
C: 要素剛体回転角 $\Theta_R^{(0)}$ の余弦
ELL: 現状態の要素長

次ステップ開始時(現状態)の要素拡大回転行列
 $[T^{(0)}]^T = [T(\Theta_R^{(0)}, u_a^{(0)})]^T$

$[T, \Theta_R]^T = \frac{\partial}{\partial \Theta_R} [T]^T$


```

22 TUA(1,1,2)=-S/ELL(1)/ELL(1)
23 TUA(1,1,3)=-S/ELL(1)/ELL(1)
24 TUA(1,2,2)=C/ELL(1)/ELL(1)
25 TUA(1,2,3)=C/ELL(1)/ELL(1)
C
26 TROT2(1,1,1)=-C
27 TROT2(1,1,2)=-S/ELL(1)
28 TROT2(1,1,3)=-S/ELL(1)
29 TROT2(1,2,1)=-S
30 TROT2(1,2,2)=C/ELL(1)
31 TROT2(1,2,3)=C/ELL(1)
C
32 TRUA(1,1,2)=-C/ELL(1)/ELL(1)
33 TRUA(1,1,3)=-C/ELL(1)/ELL(1)
34 TRUA(1,2,2)=-S/ELL(1)/ELL(1)
35 TRUA(1,2,3)=-S/ELL(1)/ELL(1)
C
36 RV(0,1,1)=-S/ELL(1)
37 RV(0,1,2)=C/ELL(1)
38 RV(0,1,4)=S/ELL(1)
39 RV(0,1,5)=-C/ELL(1)
C
40 10 CONTINUE
C
41 DO 20 II=1,2
42 DO 20 JJ=1,3
43 DO 20 I=1,NE (全ての要素について実行)
44 TT(0,I,II+3,JJ)=-TT(0,I,II,JJ)
45 TROT(1,II+3,JJ)=-TROT(1,II,JJ)
46 TUA(1,II+3,JJ)=-TUA(1,II,JJ)
47 TROT2(1,II+3,JJ)=-TROT2(1,II,JJ)
48 TRUA(1,II+3,JJ)=-TRUA(1,II,JJ)
49 20 CONTINUE
C
50 RETURN
51 END

```

$$[T, u_a]^T = \frac{\partial}{\partial u_a} [T]^T$$

$$[T, \text{error}]^T = \frac{\partial^2}{\partial \Theta_R^2} [T]^T$$

$$[T, \text{error}]^T = \frac{\partial^2}{\partial \Theta_R \partial u_a} [T]^T$$

次ステップ開始時(現状態)の $\{R^{(0)}\}$

0004行~0040行まで計算された諸成分を用いて、それ以外の成分を設定する

参考文献

- [1] Yokoo, Y., Nakamura, Tsuneyoshi and Uetani, K.: The incremental perturbation method for large displacement analysis of elastic-plastic structures, International Journal for Numerical Methods in Engineering, pp. 503-525, 1976.
- [2] 上谷宏二: 有限変形を考慮した連続体の弾塑性解析, 京都大学修士論文, 1972
- [3] 中村恒善, 上谷宏二: 複合非線形問題の数値解析法, 「骨組構造解析法要覧」(成岡昌夫, 中村恒善編著), 第8章, pp.159-184, 培風館, 1976.
- [4] 中村恒善, 上谷宏二: 弾塑性解析法の現状, 「建築構造力学の最近の発展」(日本建築学会構造委員会応力小委員会編), 4章, 4.1, pp.367-403, 1987.
- [5] Tanabashi, R., Nakamura, Tsuneyoshi, and Ishida, S.: Gravity Effect on the Catastrophic Dynamic Response of Strain-Hardening Multi-story Frames, Proceedings of the fifth World Conference on Earthquake Engineering(1973, Rome), Vol. 2, pp. 2140-2151, 1974.
- [6] Yokoo, Y., Nakamura, Tsuneyoshi, Ishida, S. and Nakamura, Takashi: Cyclic Load-deflection Curves of Multi-story Strain-hardening Frames Subjected to Dead and Repeated Alternating Lateral Loads, Preliminary Report of IABSE Symposium on RESISTANCE AND ULTIMATE DEFORMABILITY OF STRUCTURES ACTED ON BY WELL-DEFINED REPEATED LOADS (Lisbon), pp.81-87, 1973.
- [7] 石田修三: 有限要素法の建築構造への応用, 土木学会関西支部講習会テキスト「建設技術者のための有限要素法の基礎と応用」, pp.187-201, 1973.
- [8] 石田修三: 弾塑性骨組の静的および動的なたわみ解析法, 京都大学学位論文, 1975.
- [9] 中村恒善, 石田修三: 弾塑性骨組の静的および動的なたわみ解析, 「骨組構造解析法要覧」(成岡昌夫, 中村恒善編著), 第9章, pp.185-210, 培風館, 1976.
- [10] 中村恒善, 上谷宏二: 弾塑性構造物の臨界挙動, 材料, 第30巻, 第333号, pp. 535-548, 1981.
- [11] 中村恒善: 骨組の非線形挙動の解析, 「骨組構造の解析」(新建築学大系36, II), 1982.

- [12] 中村恒善：弾塑性構造物の臨界挙動—プロトタイプとしての部材及び骨組の臨界挙動について—，第31回応用力学連合講演会講演論文抄録集，pp.13-18，1981。
- [13] 中村恒善：弾塑性構造物の臨界挙動，「建築構造力学の最近の発展」（日本建築学会構造委員会応力小委員会編），4章，4.5，pp.494-518，1987。
- [14] 中村恒善：弾塑性構造物の臨界挙動，日本建築学会近畿支部構造力学講究録第4号，「構造物の新しい臨界状態とその解析法」，pp.81-104，1989。
- [15] 半谷裕彦：骨組構造物の幾何学的非線形問題（その3）—摂動法による弾性安定問題の解析—，「骨組構造解析法要覧」（成岡昌夫，中村恒善編著），第5章，pp.91-117，培風館，1976。
- [16] Koiter, W.T. : On the Stability of Elastic Equilibrium, Dissertation, Delft, Holland, 1945. (English translation, NASA, TT, F-10, 833, 1967)
- [17] Thompson, J.M.T. : Basic Principles in the General Theory of Elastic Stability, Journal of Mechanics and Physics of Solids, Vol.11, pp.13-20, 1963.
- [18] Thompson, J.M.T. : A General Theory for the Equilibrium and Stability of Discrete Conservative Systems, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik, Vol.20, pp.797-846, 1969.
- [19] Thompson, J.M.T. and Hunt, G.W. : A GENERAL THEORY OF ELASTIC STABILITY, John Wiley & Sons, 1973.
- [20] Shanley, F.R. : Inelastic Column Theory, Journal of Aeronautical Sciences, Vol.14, pp.261-267, 1947.
- [21] Hill, R. : On the Problem of Uniqueness in the Theory of Rigid-plastic Solid I ~ III, Journal of Mechanics and Physics of Solids, I) Vol.4, pp.247-255, 1956, II) Vol.5, pp.1-8, 1956, III) Vol.5, pp.153-161, 1957.
- [22] Hill, R. : A Gneral Theory of Uniqueness and Stability in Elastic-plastic Solids, Journal of Mechanics and Physics of Solids, Vol.6, pp.236-249, 1958.
- [23] Hill, R. and Sewell, S.J. : A General Theory of Inelastic Column Failure, I, II, Journal of Mechanics and Physics of Solids, I) Vol.8, pp.105-111, 1960, II) Vol.8, pp.112-118, 1960.

- [24] Sewell, M.J. : The Static Perturbation Technique in Buckling Problems, Journal of Mechanics and Physics of Solids, Vol.13, pp.247-265, 1965.
- [25] Hutchinson, J.W. : Post-bifurcation Behavior in the Plastic Range, Journal of Mechanics and Physics of Solids, Vol.21, pp.163-190, 1973.
- [26] Walker, A.C. : A Method of Solution for Non-linear Simultaneous Algebraic Equations, International Journal for Numerical Method in Engineering, Vol.1, pp.177-180, 1969.
- [27] Roorda, J. and Chilver, A.H. : Frame Buckling: An Illustration of the Perturbation Technique, International Journal of Nonlinear Mechanics, Vol.5, pp.235-246, 1970.
- [28] Hangai, Y. and Kawamata, S. : Perturbation Method in the Analysis of Geometrically Nonlinear Stability Problems, Advances in COMPUTATIONAL METHODS IN STRUCTURAL MECHANICS AND DESIGN (Edited by J.T. Oden et al), UAH Press, pp.473-489, 1972.
- [29] 半谷裕彦：構造物の安定および大変形解析 4. 数値解析法と数値解析例，「有限要素法ハンドブック II 応用編」（鷲津久一郎 他編），第5章，pp.150-169，1983。
- [30] Wempner, G.A. : Discrete Approximations Related to Nonlinear Theories of Solids, International Journal of Solids and Structures, Vol.7, pp.1581-1599, 1971.
- [31] Riks, E. : The Application of Newton's Method to the Problem of Elastic Stability, Journal of Applied Mechanics, Vol.39, pp.1060-1065, 1972.
- [32] 細野 透：弧長法による弾性座屈問題の解析（その1）座屈点における増分解の性質，日本建築学会論文報告集，第242号，pp.41-50，1976。
：同（その2）数値解析法としての弧長法，日本建築学会論文報告集，第243号，pp.21-31，1976。
- [33] 日置興一郎，村上益美，村田雅枝：平行弦剛接トラス柱の構面内弾性座屈荷重の算定法，日本建築学会論文報告集，第346号，pp.51-59，1984。
- [34] 上谷宏二：弾塑性安定限界と限界後挙動の解析，日本建築学会秋季大会（近畿）応力パネルディスカッション資料「建築骨組の安全限界解析法—その現状と問題点—」（構造標準委員会応力分科会編），pp.7-10，1980。

- [35] Tanabashi, R., Kaneta, K., Nakamura, Tsuneyoshi and Ishida, S.: To the Final State of Rectangular Frames, Proceedings of the fourth World Conference on Earthquake Engineering, Santiago, Chile, A4, pp.179-194, 1969.
- [36] 石田修三: 鋼構造骨組の弾塑性応答解析法, 「建築構造力学の最近の発展」(日本建築学会構造委員会応力小委員会編), 4章 4.4, pp.469-493, 1987.
- [37] 日本建築学会: 「鋼構造限界状態設計規準(案)・同解説」, 1990.
- [38] 中村恒善: 最適設計理論と性能制御理論, 「建築構造力学の最近の発展」(日本建築学会構造委員会応力小委員会編), 1章, 1.5, pp.99-136, 1987.
- [39] 例えば, FACOM FORTRAN S S L II 使用手引書(科学用サブルーチンライブラリ), 富士通, 4e, 1979.
- [40] Timoshenko, S.P. and Gere, J.M.: THEORY OF ELASTIC STABILITY, McGraw-Hill, pp.76-82, 1961.
- [41] Britvec, S.J. and Chilver, A.H.: Elastic Buckling of Rigidly-jointed Braced Frames, Journal of the Engineering Mechanics Division, Proc. of ASCE, Vol.89, No.EM6, pp217-255, 1963.
- [42] Britvec, S.J.: The Stability of Elastic Systems, Pergamon Press Inc., 1973.
- [43] 若林 実, 野中泰二郎, 小城 修, 山本 昇: 繰返し軸方向力を受ける部材の挙動に関する一実験, 京都大学防災研究所年報, 14A, pp.371-381, 1971; 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp.381-382, 1971.
- [44] 若林 実, 野中泰二郎, 中村 武, 森野捷輔, 吉田 望: 繰返し軸方向力を受ける部材の弾塑性挙動に関する実験的研究(その2), 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp.971-972, 1973; 繰返し軸方向力を受ける部材の挙動に関する実験(その1), 京都大学防災研究所年報, 16B, pp.113-125, 1973.
- [45] 若林 実, 松井千秋, 三谷 勲: 材端拘束を受ける鉄骨筋違の繰返し弾塑性性状に関する研究, 日本建築学会論文報告集, 第262号, pp.83-92, 1977.
- [46] 田中 尚, 重信恒雄: 鋼部材の繰返し軸方向力に対する弾塑性挙動(小型モデルによる実験), 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp.973-974, 1973.
- [47] Jain, A.K., Goel, S.C. and Hanson, R.D.: Hysteretic Cycles of Axially Loaded Steel Members, Journal of the Structural Division, Proc. of ASCE Vol.106, No.ST8, pp.1777-1795, 1980.

- [48] Nonaka, T.: An Elastic-plastic Analysis of a Bar under Repeated Axial Loading, International Journal of Solids and Structures, Vol.9, pp.569-580, 1973.
- [49] Nonaka, T.: Approximation of Yield Condition for the Hysteretic of a Bar under Repeated Axial Loading, International Journal of Solids and Structures, Vol.13, pp.637-643, 1977.
- [50] Nonaka, T.: An Analysis for Large Deformation of an Elastic-plastic Bar under Repeated Axial Loading-I, II, International Journal of Mechanical Sciences, I) Vol.19, pp.619-627, 1977, II) Vol.19, pp.631-638, 1977.
- [51] 野中泰二郎: 繰返し軸方向载荷を受ける部材の履歴挙動に関する閉解, 第1部 基礎式の誘導, 日本建築学会論文報告集, 第334号, pp.1-8, 1983.
: 第2部 解析例, 日本建築学会論文報告集, 第338号, pp.29-35, 1984.
: 第3部 塑性履歴性状, 日本建築学会論文報告集, 第343号, pp.42-50, 1984.
- [52] Fujiwara, T.: Earthquake Response of Framed Structures Having Aseismic Elements Part I, 日本建築学会論文報告集, 第285号, pp.101-108, 1979.
- [53] Shibata, M.: Analysis of Elastic-plastic Behavior of a Steel Brace Subjected to Repeated Axial Force, International Journal of Solids and Structures, Vol.18, No.3, pp.217-228, 1982.
- [54] 藤本盛久, 和田 章, 白方和彦, 小杉 立: 筋違付鉄骨ラーメンの弾塑性解析に関する研究, 日本建築学会論文報告集, 第209号, pp.41-51, 1973.
- [55] 五十嵐定義, 井上一朗, 小川厚治: 鋼構造平面骨組の弾塑性解析法に関する研究, 日本建築学会近畿支部研究報告集, 第14号, pp.157-160, 1974.
- [56] 小川厚治: 鋼構造平面骨組の耐震設計用動力学モデルに関する研究, 大阪大学学位論文, pp.11-12, 1979.
- [57] 柴田道生: 鉄骨筋違付架構の履歴性状に関する研究, 京都大学学位論文, pp.693-694, 1983.
- [58] 中村恒善, 鎌形修一, 小坂郁夫: 非定常履歴単軸構成法則とその部材解析への適用 その1 応力-歪経路のパターン分類と構成法則, 日本建築学会論文報告集, 第300号, pp.1-8, 1981.; 同 その2 部材挙動の予測とその検証, 日本建築学会論文報告集, 第301号, pp.9-15, 1981.

- [59] 上谷宏二：梁-柱の単調曲げ挙動と繰返し曲げ挙動，日本建築学会大会学術講演梗概集，C・構造Ⅱ，pp.1293-1294，1989.
- [60] 藤本盛久，北後 寿，橋本篤秀，守谷一彦：繰返し水平荷重をうける筋違付鉄骨ラーメンの弾塑性性状に関する研究(その4)K型筋違付ラーメンの実験(Ⅲ)，日本建築学会大会学術講演梗概集，pp.1373-1374，1972.
- [61] 柴田道生，若林 実：繰返し荷重を受ける筋違付架構の弾塑性解析，日本建築学会論文報告集，第325号，pp.9-16，1983.
- [62] 若林 実，柴田道生，今村哲雄，西野孝仁：K型筋違付架構の弾塑性挙動に関する実験的研究，京都大学防災研究所年報，第24号B-1，pp.171-183，1981.
- [63] 藤本盛久，和田 章，岩田 衛，中谷文俊：鋼構造骨組の三次元非線形解析，日本建築学会論文報告集，第227号，pp.75-90，1975.
- [64] 武藤 清，津川恒久，後藤幸義：K型筋かい付鉄骨骨組の設計と終局耐力 筋かい付鉄骨造発電所建家の耐震設計法に関する実証的研究(その2)，日本建築学会構造系論文報告集，第360号，pp.44-53，1986.
- [65] 辻 文三，西野孝仁，元木正弘：筋違付骨組の弾塑性変形性状に関する研究(Ⅱ.弾塑性ヒンジモデルによる解析)，日本建築学会近畿支部研究報告集，第25号，pp.409-412，1985.
- [66] 遠藤直邦，福田俊文，山内泰之，西山 功，渡辺朋之：日米共同大型耐震実験研究(鉄骨造)27,28 筋かい付骨組の復元力特性(解析その1,2)，日本建築学会大会学術講演梗概集，pp.1449-1452，1984.
- [67] 井上一郎：ブレース架構試験体の弾塑性挙動と力学モデル，日本建築学会近畿支部鉄骨構造部会昭和62年度研究会資料集，pp.20.1-20.20，1988.
- [68] 五十嵐定義，井上一郎，清水直樹，片山丈士，渡辺哲夫，瀬川輝夫，久徳敏治：K形およびVK形ブレース架構の塑性耐力に関する実験的研究(その1.実験方法および実験結果)，(その2.解析結果と実験結果の比較)，日本建築学会近畿支部研究報告集，第28号，pp.541-552，1986；日本建築学会大会学術講演梗概集，C・構造Ⅱ，pp.1003-1006，1986.
- [69] 上谷宏二：繰返し載荷時の限界状態と限界状態設計法，1989年度大会(九州)構造部門研究協議会資料「限界状態設計法について」(日本建築学会構造委員会編)，pp.5-6，1989.

- [70] 中村恒善，上谷宏二，吉田亘利：繰返し曲げを受ける鋼梁-柱における構面外変形の発生に関する実験，日本建築学会大会学術講演梗概集，C・構造Ⅱ，pp.1075-1076，1988.
- [71] 中村恒善，上谷宏二，吉田亘利：繰返し曲げを受ける鋼梁-柱における構面外変形の発生に関する実験(載荷プログラムの差による影響)，日本建築学会大会学術講演梗概集，C・構造Ⅱ，pp.1295-1296，1989.
- [72] 上谷宏二，中村恒善，常岡次郎：繰返し両振り曲げを受ける片持梁-柱の構面外変形発生機構と臨界点理論，日本建築学会大会学術講演梗概集，C・構造Ⅱ，pp.1077-1078，1989.
- [73] 上谷宏二：繰返し両振り曲げを受ける弾塑性梁-柱についての対称限界理論と定常状態限界理論，京都大学学位論文，1984.
- [74] Uetani, K. and Nakamura, Tsuneyoshi: Symmetry Limit Theory for Cantilever Beam-column subjected to Cyclic Reversed Bending, Journal of Mechanics and Physics of Solids, Vol.31, pp.449-484, 1983.
- [75] 日本建築学会：「建築耐震設計における保有耐力と変形性能(1990)」，p.90，1990.
- [76] 中村恒善，太田 修，上谷宏二：鋼骨組の腰くびれ横揺れ崩壊に関する実験的研究，日本建築学会論文報告集，第315号，pp.48-60，1982.
- [77] 石崎潑雄，中村恒善，石田修三，奥平正義：強風による弾塑性高層骨組の動的崩壊の解析，構造物の耐風性に関する第4回シンポジウム論文集，pp.109-116，1976.
- [78] 横尾義貫，中村恒善，伝田光孝：増分摂動法による弾塑性構造物の動的安定限界の解析，日本建築学会大会学術講演梗概集，pp.693-694，1975.

審査を受けた論文

- 1) Morisako, K., Ishida, S., Nakamura, Tsuneyoshi and Ishizaki, H. : Dynamic Collapse of Frames under Wind Disturbances, Journal of the Structural Division, Proc. of ASCE, Vol. 107, No. ST12, Proc. Paper 16770, December, pp. 2365-2380, 1981.
- 2) Ishida, S. and Morisako, K. : Collapse of SDOF System to Harmonic Excitation, Journal of Engineering Mechanics, Proc. of ASCE, Vol. 111, No. EM3, Proc. Paper 19543, March, pp. 431-448, 1985.
- 3) 石田修三, 森迫清貴：多層K型筋かい付鋼骨組の塑性設計試案, 日本建築学会構造系論文報告集, 第379号, pp. 26-33, 1987. 9.
- 4) 石田修三, 森迫清貴, 山本 靖：変位関数に曲げ縮み連成項を含む一次元複合非線形有限要素法, 日本建築学会構造系論文報告集, 第384号, pp. 80-89, 1988. 2.
- 5) 石田修三, 森迫清貴：増分摂動法を導入した一次元複合非線形有限要素法, 日本建築学会構造系論文報告集, 第397号, pp. 73-82, 1989. 3.
- 6) 石田修三, 上谷宏二, 森迫清貴, 西村 督：増分摂動法を導入した一次元複合非線形有限要素法の動的解析への適用 (F E R T - P D), 日本建築学会構造系論文報告集, 第409号, pp. 67-75, 1990. 2.

研究発表：概要についての採否審査を経た論文 (○印講演者)

- 7) 石田修三, ○森迫清貴：調和風力を受ける1自由度弾塑性構造物の動的崩壊限界, 第30回構造工学シンポジウム講演論文集, pp. 331-339, 1984.
- 8) ○Ishida, S. and ○Morisako, K. : The Dynamic Collapse Behavior of Multi-story Frames subjected to Simulated Wind Forces, Proceedings of the Third International Conference on Tall Buildings, Hong Kong & Guangzhou, pp. 292-298, 1984.
- 9) 石田修三, ○森迫清貴：正弦波外力をうける1自由度バイリニア履歴系の動的弾塑性挙動の分類, 第35回応用力学連合講演会予稿集, pp. 195-198, 1985.

- 10) Ishida, S. and ○Morisako, K. : Plastic Design of Earthquake-resistant K-braced Multi-story Steel Frames, Proceedings of Ninth World Conference on Earthquake Engineering, Tokyo & Kyoto (1988), Vol. IV, pp. 267-272, 1989.
- 11) 石田修三, ○森迫清貴：増分摂動法を導入した一次元複合非線形有限要素法 (F E R T - P) による2層筋かい付鉄骨架構の繰返し実験のシミュレーション, 第12回情報・システム・利用・技術シンポジウム論文集, pp. 325-330, 1989.
- 12) 石田修三, ○森迫清貴：増分摂動法を導入した弾塑性骨組の静的および動的臨界挙動予測解析法, 第14回構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, pp. 67-72, 1990.

その他の研究発表 (○印講演者)

- 13) 石崎潑雄, 中村恒善, 石田修三, ○森迫清貴：変動風圧による歪硬化多層建築骨組の動的崩壊の解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp. 737-738, 1979.
- 14) 石田修三, 森迫清貴, ○山本 滋：単純梁柱型移動座標を用いた弾塑性骨組の大たわみ解析, 日本建築学会近畿支部研究報告集, 第20号, pp. 233-236, 1980.
- 15) 石田修三, 森迫清貴, 今西完治, ○大淵敏行：弾塑性骨組の大たわみ解析法におけるひずみ変位関係式の扱いについて, 日本建築学会近畿支部研究報告集, 第20号, pp. 237-240, 1980.
- 16) 石田修三, 森迫清貴, ○大淵敏行：単純な歪・変位関係式を用いた歪硬化骨組の大たわみ解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp. 1101-1102, 1981.
- 17) 石田修三, ○森迫清貴：シミュレートした風外乱に対する多層建築骨組の動的弾塑性解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp. 1169-1170, 1982.
- 18) 石田修三, 森迫清貴, ○後藤正美：偏心K型筋違付骨組の非弾性座屈後挙動, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp. 2031-2032, 1982.
- 19) 石田修三, 森迫清貴, ○後藤正美, 今一 亨：偏心K型筋違付多層骨組の大たわみ解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp. 1437-1438, 1983.
20. 1) 石田修三, ○森迫清貴, 今一 亨, 薬研地彰：繰返し強制変位を受ける歪硬化K型筋違付骨組の大たわみ解析 (その1 層せん断力-層間変形角曲線に見られる現象), 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp. 1467-1468, 1984.

- 20.₂) 石田修三, 森迫清貴, 今一 亨, ○葉研地彰: 繰返し強制変位を受ける歪硬化 K 型筋違付骨組の大たわみ解析 (その2 塑性域の進展状況), 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp.1469-1470, 1984.
- 20.₃) 石田修三, 森迫清貴, ○今一 亨, 葉研地彰: 繰返し強制変位を受ける歪硬化 K 型筋違付骨組の大たわみ解析 (その3 筋違の水平力負担状況), 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp.1471-1472, 1984.
- 21) 石田修三, 森迫清貴, 田中仁志, ○佐藤正巳: 全体的力-変形曲線に関する考察, 日本建築学会近畿支部研究報告集, 第25号, pp.365-368, 1985.
- 22._a) 石田修三, ○森迫清貴, 葉研地彰, 土井誠也: 塑性設計された重層 K 型筋違付鋼骨組の静的弾塑性解析, 日本建築学会近畿支部研究報告集, 第25号, pp.369-372, 1985.
- 22._b) 石田修三, 森迫清貴, 葉研地彰, ○土井誠也: 塑性設計された重層 K 型筋違付鋼骨組の静的弾塑性解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集, C・構造 II, pp.893-894, 1985.
- 23.₁) 石田修三, 森迫清貴, ○葉研地彰, 田中仁志: 柱に鉛直力をうける歪硬化一層 K 型筋違付骨組の繰返し挙動 (その1 定鉛直力の場合), 日本建築学会大会学術講演梗概集, C・構造 II, pp.895-896, 1985.
- 23.₂) 石田修三, 森迫清貴, 葉研地彰, ○田中仁志: 柱に鉛直力をうける歪硬化一層 K 型筋違付骨組の繰返し挙動 (その2 変動鉛直力の場合), 日本建築学会大会学術講演梗概集, C・構造 II, pp.897-898, 1985.
- 24.₁) 石田修三, ○森迫清貴, 細川高志: 正弦波外力をうける1自由度バイリニア劣化型履歴系の動的弾塑性挙動 (その1 定振幅正弦波外力の場合), 日本建築学会大会学術講演梗概集, B・構造 I, pp.603-604, 1985.
- 24.₂) 石田修三, 森迫清貴, ○細川高志: 正弦波外力をうける1自由度バイリニア劣化型履歴系の動的弾塑性挙動 (その2 振幅が漸増後一定となる正弦波外力の場合), 日本建築学会大会学術講演梗概集, B・構造 I, pp.605-606, 1985.
- 25) 石田修三, ○森迫清貴, 田中仁志, 佐藤正巳: 弾塑性骨組の静的たわみ解析における変位増分法の解技法について, 日本建築学会近畿支部研究報告集, 第26号, pp.333-336, 1986.
- 26) 石田修三, 森迫清貴, ○田中仁志, 佐藤正巳: 塑性設計された重層 K 型筋違付鋼骨組の静的弾塑性たわみ解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集, C・構造 II, pp.1001-1002, 1986.

- 27) 石田修三, ○森迫清貴: 鋼構造平面骨組の弾塑性応答解析法 (F E R T), 日本建築学会近畿支部鉄骨構造部会研究会資料 (1986.11.07), 昭和61年度研究会資料集, pp.6.1-6.26, 1987.
- 28) 石田修三, ○森迫清貴, 佐藤正巳, 山本 靖: Bowing actionを考慮した一次元複合非線形有限要素法 (F E R T - B), 日本建築学会大会学術講演梗概集, B・構造 I, pp.91-92, 1987.
- 29) 石田修三, ○森迫清貴: 増分摂動法を導入した一次元複合非線形有限要素法 (F E R T - P), 日本建築学会大会学術講演梗概集, B・構造 I, pp.937-938, 1988.
- 30) 石田修三, ○森迫清貴, 関井 徹: 増分摂動法を導入した一次元複合非線形有限要素法 (F E R T - P) による多層 K 型筋かい付鋼骨組の弾塑性挙動の解析, 日本建築学会近畿支部研究報告集, 第29号, pp.401-404, 1989.
- 31) 石田修三, ○森迫清貴, 松崎浩一: 骨組の大たわみ解析における格間伝達行列について, 日本建築学会近畿支部研究報告集, 第30号, pp.317-320, 1990.

この論文を纏めながら、筆者は本当に多くの幸運に恵まれ、幾人かの実に優れた師によってここまで導かれてきたことを改めて強く感じて来ました。もしこれらの先生方にめぐりあうことがなければ、研究を続けて来ることはできなかったでしょうし、本論文で提示したような成果を上げることは到底不可能であったように思われます。これらの先生方に、まず心より深甚の謝意を表したいと思います。

石田修三先生(現 京都工芸繊維大学教授)には、京都工芸繊維大学建築工芸学科入学以来、筆者の人生の半分におよぶ19年という長い年月にわたり、絶えず熱心な御指導とまさに親身な励ましを賜わってまいりました。筆者は、建築設計学習への独断的迷いから、とにかく大学では苦手な科目を勉強しておこうという動機で3回生後期に建築構造力学講座の門をたたき、大学院を修了後にもう1度出来れば建築意匠設計へ戻るつもりでいました。しかし、先生の建築構造物の解析法に関する研究の世界に触れ、解析プログラムを作成する手伝いをさせていただくうちに、今後の建築設計および建設業務における計算機援用の拡りを意識するようになり、その中での信頼のおけるソフトウェア開発の重要性を認識するようになりました。また、解析法の研究は、ハードとソフトの違いはありますが、最終的にものをつくるという点で、ある種、建築設計における構想から詳細に至る間のフィードバック的思考と似通ったところがあり、筆者にとって十分に興味のあることがらになってきました。こうした筆者の心の変化は、多くの失敗に対しても実に忍耐強く接して頂いた石田先生の指導によるものでありましょう。建築構造力学の初歩から本論文で提示した解析法の母体となったFERTを懇切丁寧に伝授して頂いたこと、ならびに本論文の内容に関して御指導頂いたこと、また大学院修了後、京都大学に1年間研究生として在籍できるよう紹介して頂いたことなど、想起せせば数限りない様々な事柄に対して、心から感謝をいたします。

中村恒善先生(現 京都大学教授)には、京都大学に研究生として在籍することを許可して頂き、京都工芸繊維大学の助手に採用された後も数年間ゼミに参加する機会を与えて頂きました。石崎澄雄先生(現 京都大学名誉教授)、中村恒善先生、石田修三先生と共著で初めて論文を投稿するという身に余る光栄な機会を得た際、筆者の拙い英文草稿を種に何度も討論を積み重ね、粘り強く完成に導いて頂いたことは、筆者にとって最大の幸運であり、忘れ難いことであります。また本論文を纏めるに際し、最初、筆者が従来解析できなかった問題が解析できるようになったという事実を成果として主張しようとしていたのに対し、先生は解析ができるようになった「からくり」を明確に記述することの重要性を指摘していただきました。整合剛性選択問題に関する本論文の記述は、先生の御指摘によってより充実したものとなり、理論的側面を強化することができました。これまでの温かい御指導に対し心から感謝の意を表します。

上谷宏二先生(現 京都大学助教授)には、京都大学に研究生として在籍して以来、常に研究上の相談にのって頂いてきました。特に、筆者が弾塑性骨組の解析法に増分摂動法を導入することを決意し、増分摂動法の提案者である先生を、1987年の冬、繰り返し曲げ下の鋼部材の実験をしておられた最中に訪ねてからは、実に懇切丁寧な御指導を頂きました。さらに本論文を纏めるにあたっては、しばしば御自宅にまで押し掛ける筆者に対し、御多忙であったにもかかわらず、終始温かい御指導と適切な助言を賜わりました。先生に心からお礼を述べさせていただきます。

本論文を作成するにあたり野中泰二郎先生(現 京都大学教授)および藤原悌三先生(現 京都大学教授)には、筆者のために時間を何度か割いて頂き、論文の具体的内容ならび全体の構成に関するいくつかの貴重な御指摘を賜わりました。また、井上一朗先生(現大阪大学助教授)には、本論文第4章に記した筋かい付鋼骨組の実験の見学から実験データの提供などの便宜を図って頂きました。本論文で提示した解析法の研究を始めた動機はその実験を対象とした解析を行なおうとしたことによるものであります。永井興史郎先生(現 京都工芸繊維大学助教授)には、計算プログラムのデバッグ手法などに関して様々な相談にのって頂きました。これらの先生方に対し感謝の意を表します。

筆者がこれまで研究を続けてこれたのは、上記の先生方の御指導と励ましによるばかりでなく、日置興一郎先生(現 名城大学教授、大阪市立大学名誉教授)、中村 武先生(現 京都工芸繊維大学教授)をはじめとする関西在住の構造力学、鉄骨構造関係の諸先生方の温かい励ましと、中村昌生教授、藤本康雄教授をはじめとする京都工芸繊維大学旧建築学教室の諸先生方ならびに職員の方々の励ましと御支援によるおかげであります。ここに心からお礼を述べさせていただきます。

また、本論文中および付録：発表論文一覧の共著者として名を挙げた諸氏だけでなく京都工芸繊維大学構造研究室の修論生、卒論生の協力に謝意を述べさせていただきます。

最後に、これまで温かく見守ってくれた福山の両親と臼杵の義父母、本論文を作成する間殆どかまってやれなかった二人の息子、研究生活を支えてくれた妻に、感謝の意を表します。

1991年3月

森 迫 清 貴